Práctico 12

1. Funciones continuas

1. Determinar para que $a, b \in \mathbb{R}$ la función f es continua

   a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ *d)* $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ a\sin(x+b) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

   e) Primer parcial, segundo semestre 2014, MO

   $$f(x) = \begin{cases} 2\cos(x) & \text{si } x \leq \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Probar que si f es continua entonces $f(0) = 0$.

3. De ejemplos de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sean discontinuas en los siguientes conjuntos

   a) $\emptyset$ *b)* $\{0\}$ *c)* $\mathbb{Z}$ *d)* $\{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *e)* $\left\{\dfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

   Piense sobre si una función puede ser discontinua en todo punto.

   Piense sobre si una función puede ser discontinua en los racionales (esto es mucho mas dificil).

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas.

   Probar que las funciones $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $h_1(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$ y $h_2(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ son continuas.

5. **Funciones de Lipschitz** Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una funcion de Lipchitz

   a) Probar que f es continua

   b) Probar que

   $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0, \ \forall n > 1$$

   Deducir que si P es un polinomio y es una función de Lipschitz, entonces $P(x) = ax + b$.

6. Sean f y g funciones reales y sea $c \in \mathbb{R}$.

   a) Demostrar que si f es discontinua en c y g es continua en c entonces $f + g$ es discontinua en c. ¿Qué pasa si ambas funciones son discontinuas en c?

   b) ¿Qué se puede afirmar con respecto al producto de las funciones?

   c) Supongamos ahora que $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \leq 0 \\ |4 - x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   Estudiar la continuidad en 0 de f, g , $f \circ g$ y $g \circ f$.

d) Definir f y g para que f sea discontinua en c, g sea discontinua en $f(c)$ y $g \circ f$ sea continua en c.

7. **Extensión de funciones**

   Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ una extension de f es una función $g : J \to \mathbb{R}$ tal que $I \subset J$ y $f(x) = g(x)$, $\forall x \in I$

   a) Determinar los dominios maximales de las siguientes expresiones y si se pueden extender a $\mathbb{R}$ de forma continua.

   $$a)\ \frac{1}{x} \qquad b)\ e^{\frac{1}{x}} \qquad c)\ e^{\frac{-1}{x^2}} \qquad d)\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad e)\ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad f)\ \frac{1}{\sin(x)}$$

   b) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua, monotona y acotada. Probar que existe $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua que es una extensión de f.

8. Determinar en que puntos es continua la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por la expresión

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fracción irreducible} \end{cases}$$

Guía de ejercicios:1,2,4 y 5.

2. Aplicaciones del teorema de Bolzano.

1. Sean a,b,c y d numeros reales tales que $a < b$ y $c < d$. Bosquejar, si es posible, funciones que cumplan.

   a) $f : (a, b) \to [c, d]$, $f((a, b)) = (c, d)$

   b) $f : (a, b) \to [c, d]$, $f((a, b)) = [c, d]$

   c) $f : (a, b) \to [c, d]$, $f((a, b)) = (c, d]$

   d) $f : [a, b] \to [c, d]$, $f([a, b]) = (c, d)$

   e) $f : [a, b] \to [c, d]$, $f([a, b]) = [c, d]$

2. **Puntos fijos**

   Dada f una función un punto fijo de f es un valor c tal que $f(c) = c$. Notar que una función puede tener varios puntos fijos, uno solo o ninguno.

   a) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Probar que f tiene al menos un punto fijo

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y monotona decreciente. Probar que f tiene al menos un punto fijo.

   c) De un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y sin puntos fijos.

3. **Polinomios**

   a) Todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz.

   b) Mostrar que la paridad de la cantidad de raíces contadas con multiplicidad es igual a la paridad del grado del polinomio.

   c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $|f(y)| \leq |f(x)|\ :\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   d) Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continua tal que

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\phi(x)}{x^n} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\phi(x)}{x^n}$$

1) Probar que si n es impar, entonces existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n + \phi(x) = 0$.
2) Probar que si n es par existe un numero y tal que $y^n + \phi(y) \leq x^n + \phi(x)\ :\ \forall x \in \mathbb{R}$

e) Dado un polinomio P decimos que una raíz ha sido separada si se ha encontrado un intervalo $[a, b]$ que contiene esta raiz y ninguna otra. Separar las raíces reales de cada uno de los siguientes polinomios (todos tienen 4 raices)

a) $3x^4 - 2x^3 - 36x^2 + 36x - 8$ *b)* $2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$ *c)* $x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x + 2$

4. *a)* Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua y $f(x)$ es racional para todo x. ¿Que puede decirse acerca de f?

   b) Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una funcion continua, tal que $x^2 + (f(x))^2 = 1$. Demuestre que o bien $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ o bien $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$

   c) ¿ Cuantas funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hay que satisfagan $(f(x))^2 = x^2$

5. **Existencia de soluciones**

   a) Demuestre que la ecuación dada $x + 2\cos(x) = 0$ tiene al menos una solución.

   b) En los siguientes casos, hallar un entero n para el cual existe x tal que $n \leq x \leq n + 1$ y $f(x) = 0$:

   a) $x^3 - x + 3$ *b)* $x^5 + 5x^4 + 2x + 1$ *c)* $x^5 + x + 1$ *d)* $x + e^x$

   c) Demostrar que existe un número x tal que:

   a) $\sin(x) = x - 1$ *b)* $x^{117} + \dfrac{534}{1 + x^2 + \sin^2(x)} = 1212$ *c)* $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \sin^2} = 119$

   Probar que la función f tiene máximo y no mínimo.

6. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que existe un par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f(a) < 0 < f(b)$. Sea A el conjunto definido por $A = \{y > a : f(z) < 0 : \forall z \in [a, y]\}$. Probar que A esta acotado, no tiene maximo y $\sup(A)$ es una raíz de f.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Probar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$

Guía de ejercicios: 1,2a,3a,5 y 8.

3. Aplicaciones del teorema de Weiestrass.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar o dar un contraejemplo para las siguientes afirmaciones

   a) Si f esta acotada si solo si tiene máximo y mínimo.

   b) Si f tiene máximo y mínimo entonces esta acotada

   c) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f esta acotada.

   d) Si f esta acotada entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

   e) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   f) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

   g) Si existe $a, \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   h) Si existe $a, \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

2. **Extremos absolutos**

   a) Primer parcial, primer semestre 2010. Sean $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

   $$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ a^2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   El valor de a que hace que f sea continua y no tenga tenga extremos absolutos es ...

   b) Primer parcial, primer semestre 2007.
   Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

   Indicar la opción correcta.

   (A) f alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.
   (B) f^2 alcanza un máximo y g alcanza un mínimo.
   (C) f esta acotada pero no alcanza ni mínimo ni máximo y g alcanza un mínimo.
   (D) f alcanza un mínimo y $-g$ esta acotada superiormente.
   (E) f^2 alcanza un mínimo y g^2 no esta acotada.

3. **Integreales**

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable, en particular, localmente acotada.
   Probar que la función $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es continua.

   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua e integrable (más adelante se vera que esta hipótesis es redundante).
   Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ probar que existe $c \in [a, b]$ tal que

   $$\int_a^b f(t)\,dt = f(c)(b - a)$$

   c) Examen, febrero 2015, MO Si f continua es tal que $\int_{-2}^1 f(t)\,dt = 3$, entonces se cumple necesariamente que:

   (A) $f(\alpha) = 1, \ \forall\alpha \in [-2, 1]$.
   (B) $f(\alpha) < 2, \ \forall\alpha \in [-2, 1]$.
   (C) $\exists\alpha \in [-2, 1]$ tal que $f(\alpha) = -3$.
   (D) $\exists\alpha \in [-2, 1]$ tal que $f(\alpha) = 1$.
   (E) $f(\alpha) > \frac{1}{2}, \ \forall\alpha \in [-2, 1]$.

4. Primer parcial, primer semestre 2007, MO

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se consideran los siguientes enunciados:

   Enunciado I: Si f es continua en todo punto $x \in \mathbb{R}$, entonces la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es tambien un intervalo cerrado y acotado.

   Enunciado II: Si la imagen por f de cualquier intervalo cerrado y acotado es un intervalo cerrado y acotado entonces f es una función continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (A) Ambos enunciados son verdaderos.
   (B) El Enunciado II es verdadero pero, el Enunciado I es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(C) El Enunciado I es verdadero pero, el Enunciado II es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(D) El Enunciado I es verdadero pero, el Enunciado II es falso, y un contraejemplo es la función f tal que $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

(E) Ambos resultados falsos.

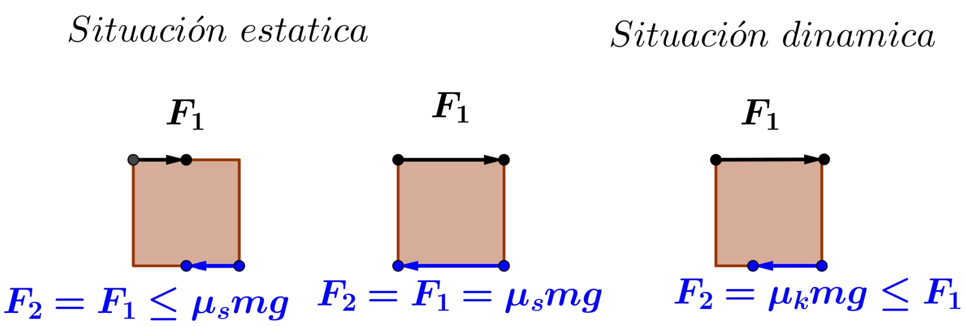
Guía de ejercicios: 1,2 y 3.

4. Aplicaciónes

1. Tenemos una caja de madera de masa m apoyada en el suelo, tambien de madera, en reposo. Empezamos a aplicarle una fuerza, digamos $F_1(t) = tN$ (una cantidad de t Newton en el instante t). Al principio la caja no se movera, esto es debido a la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo sobre la caja, contraresta la nuestra, obteniendo así que al fuerza neta sobre la caja sea 0. A la fuerza de friccion que el piso ejerce sobre la caja cuando esta esta en reposo se le llama fuerza de rozamiento estatica

   Cuando se sobrepasa un valor critico $\mu_s mg$ la caja empieza a moverse, y la fuerza de rozamiento pasa a ser dinamica $\mu_k mg$

   En este caso $\mu_s = 0{,}7$ y $\mu_k = 0{,}4$, estas constantes estan determinadas por el material de las superficies.



   a) Bosquejar la función $F_1(t)$, la fuerza que ejercemos sobre la caja, y determinar en que puntos es continua.
   b) Bosquejar la función $F_2(t)$ la fuerza que ejerce el suelo sobre la caja. En que puntos F_2 es continua.
   c) Bosquejar $F(t)$ la fuerza resultante sobre la caja y determinar en que puntos es continua.
   d) Definimos la función $x(t)$ la función posicion de la caja en funcion del tiempo. Discutir sobre como podria ser el bosquejo del desplazamiento de la caja. En que puntos esta función seria continua.

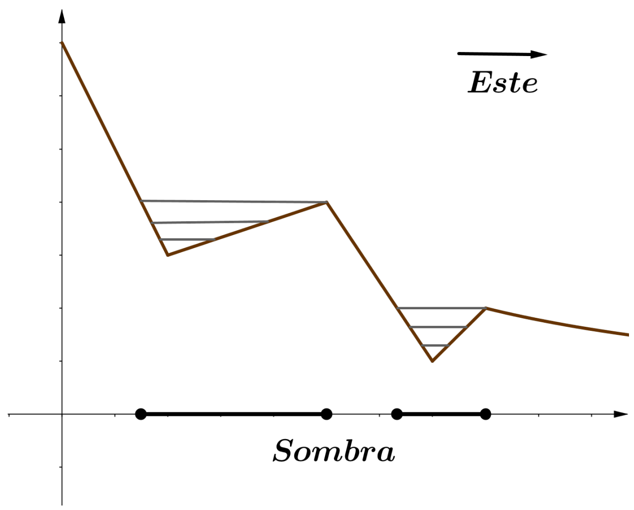
2. Sea F la función que le asgina a cada punto del planeta tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta, y que la función F es continua.

   Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura. Repetir el estudio para la función G altura al nivel del mar.

3. Lema del Sol Naciente

   Suponga que tenemos una región montaÃśosa como en la figura. Denominamos $f(x)$ a la altura de cada punto y donde la coordenada x crece hacia el este. Asuma que f es continua.

En el momento del Alba, podemos suponer que los rayos de sol son horizontales, habra lugares con sombra y lugares sin sombra. Llamamos $S = \{x :$ en el punto $(x, F(x)$ hay sombra$\}$



a) Discutir que $x \in S$ si solo si $\exists y > x$ tal que $F(x) < F(y)$. Esta es la definición formal de S.

b) Suponga que $(a, b) \subset S$ y $a \notin S$, $b \notin S$, en particular $f(a) \geq f(b)$.

1) Suponga que $f(a) > f(b)$, demuestre que el máximo de f en $[a, b]$ es $f(a)$.

2) Demuestre que esto lleva a una contradiccion por tanto $f(a) = f(b)$

c) Sea p tal que existe un intervalo I para el cual $p \in I$ que cumple la siguiente propiedad, $\forall x \in I$ $x \in S$ si solo si $x < p$. Mostrar que $F(p)$ es un pico, es decir un maximo relativo.