1. Ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes y variables

Sea $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función definida en el intervalo I, diremos que x satisface una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden con coeficiente constante si

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(t) + g(t). \tag{1}$$

Si $g(t) \equiv 0$, diremos que la ecuación es homogénea. Y si consideramos el valor inicial $x(0) = x_0$ entonces podemos considerar la EDO

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= ax(t) & (2) \\ x(0) &= x_0. & (3) \end{aligned}$$

La solución para esta última ecuación puede obtenerse de manera muy sencilla por cuadraturas o separando variables

$$\frac{dx}{x} = adt \Rightarrow \text{que implica } \log x(t) = at + \log C \Rightarrow x(t) = Ce^{at}.$$

Y como se debe satisfacer la condición inicial se desprende que $x(t) = x_0 e^{at}$. Por inspección se puede ver que efectivamente esta función es solución de (2).

Para resolver (1) con la condición inicila $x(0) = x_0$ podemos usar el método de variación de constantes suponemos $x(t) = C(t)e^{at}$ y derivando se obtiene

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dC(t)}{dt}e^{at} + C(t)ae^{at},$$

e igualando obtenemos $\frac{dC(t)}{dt} = e^{-at}g(t)$ integrando $C(t) = c + \int_0^t e^{-au}g(u)du$. De aquí se concluye que

$$x(t) = (c + \int_0^t e^{-au}g(u)du)e^{at},$$

luego evaluando en cero se verifica que $x(t) = (x_0 + \int_0^t e^{-au}g(u)du))e^{at}$.

1.1. Movimiento circular uniforme

Si $\mathbf{r}(t)$ denota la posición de una partícula que se mueve en una circunferencia de radio R. Denotemos por $\theta(t)$ el ángulo. Si la velocidad angular es constante ω entonces θ satisface la EDO lineal de primer orden $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega$ y si consideramos que la partícula parte del reposo entonces $\theta(0) = 0$. Por lo desarrollado anteriormente se tiene que $\theta(t) = \omega t$. De esta forma

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix} = R\cos\omega t\mathbf{e}_1 + R\sin\omega t\mathbf{e}_2.$$

Hemos denotado por $\mathbf{e}_i$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Derivando el vector se tiene

$$\mathbf{v}(t) := \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \omega \begin{pmatrix} -R\sin\omega t \\ R\cos\omega T \end{pmatrix}.$$

Obteniendo entonces $||\mathbf{v}(t)|| = R\omega$. Finalmente podemos calcular la aceleración

$$\mathbf{a}(t) := \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2 \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \end{pmatrix} = -\omega^2\mathbf{r}(t),$$

así $||\mathbf{a}(t)|| = R\omega^2$ y el vector aceleración está dirigido hacia el centro.

La velocidad angular tiene una relación sencilla con la frecuencia ordinaria. En efecto ω designa el número de radianes barridos por unidad de tiempo y entonces

$$2\pi f = \omega \text{ o } \frac{2\pi}{\omega} = T = \frac{1}{f},$$

arriba f es la frecuencia del movimiento y T es el período.

1.2. Segunda ley de Newton.

Ahora tenemos la posición de una partícula en el espacio que describe un movimiento. Su posición está representada por el vector

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

La partícula se mueve en un campo de fuerzas una función $F : O \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y que vale $F(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) denotamos entonces

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}.$$

El campo se puede representar por medio de lineas de fuerza. En dimensión dos es fácil representarlo.

La segunda ley de Newton establece que la aceleración de una partícula de masa M que se mueve en un campo de fuerzas F experimenta una aceleración $\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \mathbf{a}(t)$ que verifica

$$M\mathbf{a}(t) = F(x(t), y(t), z(t)) \Rightarrow M\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = F.$$

Existen diversas fuerzas en la naturaleza

- Fuerza gravitatoria
- Fuerza electrostática
- Fuerza magnética
- Fuerzas nuecleares, etc

1. Partícula en un campo eléctrico constante Vamos a estudiar el movimiento de una partícula en un campo eléctrico constante en este caso

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Para ciertas constantes E_i. La segunda ley de Newton implica

$$M\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = q\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Aquí q es la carga. Luego

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{q}{M}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Esta ecuación vectorial es en realidad un sistema de EDO si

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

es la posición de la partícula podemos escribir la EDO como

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix} = \frac{q}{M}\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

Para resolver este sistema debemos dar dos condiciones iniciales la posición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ y la velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$. Una integración inmediata nos conduce a la solución

$$\mathbf{r}(t) = \frac{q}{M}\mathbf{E}\frac{t^2}{2} + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0.$$

La introducción de condiciones iniciales es importante para garantizar la existencia y la unicidad de la solución.

2. Partícula en un campo eléctrico uniforme alterno.

   Suponemos que el campo solo posee componente en el eje x la cual se escribe

   $$E = E_x^0 \sin \omega t \mathbf{e}_1,$$

   donde $\omega = 2\pi f$ es la frecuencia angular y E_x^0 es la amplitud. La ecuación del movimiento sólo tiene efecto en el eje x y es en este caso

   $$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{q}{M}E_x \sin \omega t, \quad x(0) = x_0,\ v(0) = v_0,$$

   observar que hemos suprimido el supraíndice 0 en la amplitud. De esta manera integrando se obtiene

   $$x(t) = -\frac{qE_x}{M\omega^2}\sin \omega t + v_0 t + x_0.$$

   Derivando se tiene

   $$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{qE_x}{M\omega}\cos \omega t + v_0.$$

   Si suponemos que la $v_0 = 0$ entonces se ve que $v(0) = -\frac{qE_x}{M\omega}$ quedando la expresión para la posición

   $$x(t) = -\frac{qE_x}{M\omega^2}\sin \omega t + \frac{qE_x}{M\omega}t + x_0.$$

   Este resultado resulta inesperado: con la condición inicial $v_0 = 0$, el movimiento se compone de una oscilación superpuesta a una velocidad constante de valor $\frac{qE_x}{M\omega}$.

3. Partícula cargada en un campo magnético constante.

   Una cosa interesante de este ejemplo es que nos permite introducir un sistema de ecuaciones diferenciales lineales. La ecuación que arroja la segunda ley de Newton es

   $$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{4}$$

Déjenme detallar los objetos que aparecen en la ecuación anterior, $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula, $\mathbf{B}$ es el campo magnético c es la velocidad de la luz y $\times$ denota el producto vectorial entre dos vectores. El término $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ expresa la fuerza ejercida por el campo magnético.

Supongamos que el campo magnético está dirigido a lo largo del eje z, es decir posee la siguiente representación

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}.$$

De esta manera si usamos la definición del producto vectorial se obtiene

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = B_z v_x \mathbf{e}_1 - B_z v_y \mathbf{e}_2,$$

donde, de nuevo, los $\mathbf{e}_i$ denotan los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Por consiguiente la ecuación (4) se transforma en el sistema de ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} \dot{v}_x &= \frac{q}{Mc} v_x B_z \\ \dot{v}_y &= -\frac{q}{Mc} v_y B_z \\ \dot{v}_z &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Como veremos más adelante las soluciones de este sistema pueden expresarse de la forma

$$v_x(t) = v_1 \sin \omega t \qquad v_y(t) = v_1 \cos \omega t \qquad v_z = v_{z0}$$

substituyendo en (5) se verifica que

$$\omega = \frac{qB_z}{Mc} := \omega_c,$$

la constante ω_c recibe el nombre de velocidad ciclotrónica y es la velocidad angular del movimiento. ¿Qué aspecto tiene la trayectoria? Integrando las velocidades y debido a que la aceleración es cero en el eje z se ve que

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 - \frac{v_1}{\omega_c} \cos \omega_c t \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_1}{\omega_c} \sin \omega_c t \\ z(t) &= z_0 + v_{z0} t. \end{aligned}$$

Vemos así que la proyección del movimiento en el plano (x, y) es una circunferencia centrada en (x_0, y_0) y cuyo radio es $\rho = \frac{v_1}{\omega_c}$. El movimiento completo de la partícula es una hélice que tiene como eje la dirección de $\mathbf{B}$ (en nuestro caso el eje z) y la componente de velocidad en ese eje es constante.

2. Oscilador Armónico

El oscilador armónico es un ejemplo de excepcional importancia debido a que sirve de de modelo exacto o aproximado para muchos problemas en física clásica o cuántica. Los sistemas clásicos que son casos reales de un oscilador armónico incluyen cualquier sistema estable que se desplaza ligeramente de su punto de equilibrio. Podemos citar a manera de ejemplo.

1. Un péndulo simple, en el límite correspondiente a ángulos de oscilación pequeños.
2. Una masa sujeta a un resorte, en el límite de amplitudes de oscilación pequeñas.
3. Un circuito eléctrico compuesto de una inducción y un condensador, para corrientes o voltajes lo suficientemente pequeños de tal forma que los elementos del circuito mantengan una respuesta lineal.

2.1. Péndulo simple

El gráfico de abajo esquematiza un péndulo simple. Una partícula de masa M atada a una varilla de longitud L que gira libremente alrededor del extremo superior.

Cuando la varilla se desvía un ángulo θ, el extremo inferior se eleva la distancia $h = L - L\cos\theta$. La energía potencial de la masa M en el campo gravitatorio terrestre es $U(h) = MgL(1 - \cos\theta)$. La energía cinética del péndulo es $K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$. La energía total es

$$E = EC + EP = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + MgL(1 - \cos\theta).$$

Por la ley de conservación de la energía sabemos que esta cantidad debe permanecer constante. Ahora bien sabemos que para ángulos pequeños $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$. Así que para $\theta \sim 0$ la ecuación de la energía total deviene

$$E = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}MgL\theta^2.$$

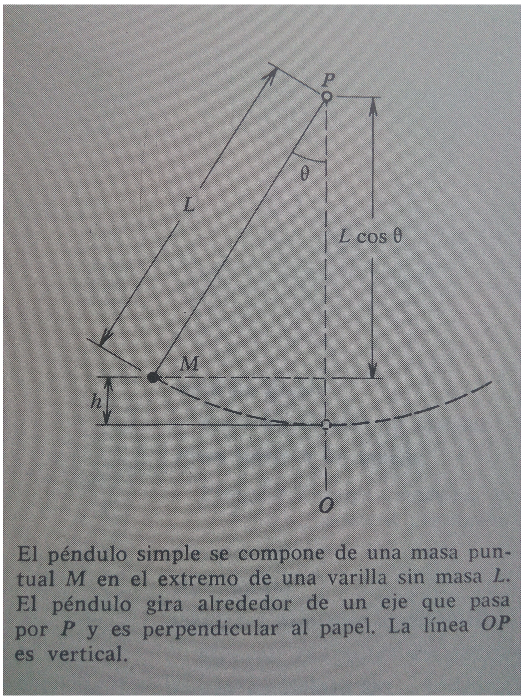

Figura 1: Péndulo simple

Despejando se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{2E - MgL\theta^2}{ML^2} \right)^{\frac{1}{2}} = (\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2E}{MgL} - \theta^2 \right). \tag{6}$$

Si designamos por $\pm\theta_0$ la amplitud de la oscilación. Resulta que en estos ángulos el péndulo está en reposo y por consiguiente su energía cinética es cero. Así

$$E = \frac{1}{2} MgL\theta^2 \Rightarrow \theta_0^2 = \frac{2E}{MgL}.$$

Luego (6) se escribe

$$\frac{d\theta}{dt} = (\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}} (\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Separando variables obtenemos la expresión

$$\frac{d\theta}{(\theta_0^2 - \theta^2)^{\frac{1}{2}}} = (\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}} dt.$$

Esta ecuación admite solución por cuadraturas. En efecto

$$\int_{\theta_1}^{\theta} \frac{d\varphi}{(\theta_0^2 - \varphi^2)} = (\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}} t.$$

Integrando y despejando obtenemos

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \sin\big[(\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}} t + \arcsin\frac{\theta_1}{\theta_0}\big].$$

Expresión que admite la escritura

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi).$$

Donde $\omega_0 = (\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}}$ y $\phi = \arcsin\frac{\theta_1}{\theta_0}$. La constante ϕ es una constante de movimiento. Aunque posee dimensiones de ángulo no tiene explicación simple. De esta manera para un péndulo se tienen tres magnitudes angulares θ_0, θ_1 y ϕ.

- θ_0 es la amplitud máxima de la oscilación.
- θ_1 es el ángulo en el cual se inició el movimiento.
- ϕ no es un ángulo particular. Se deduce de θ_0 y θ_1 y su contribución es corregir adecuadamente a $\theta = \theta_0 \sin\omega_0 t$, si el movimiento no se inició en $\theta_1 = 0$.

Por otra parte ω_0 está relacionada con la frecuencia de la oscilación libre del péndulo de la siguiente manera

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{(\frac{g}{L})^{\frac{1}{2}}}{2\pi}.$$

Una vez establecidas las características básicas de la oscilación del péndulo podemos obtener su ecuación a partir de consideraciones mecánicas. La siguiente ecuación expresa que la variación del momento cinético es proporcional al momento de la fuerza

$$ML^2\ddot{\theta} = -LMg\sin\theta.$$

De esta forma se obtiene la siguiente EDO.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

Para ángulos pequeños (cerca del punto de equilibrio) la ecuación se transforma en

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

Para resolverla recordemos la identidad de Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Si postulamos una solución

$$\theta = \theta_0 e^{i(\omega_0 t + \phi)},$$

es inmediato verificar que satisface la ecuación. Así la parte real e imaginaria son soluciones y encontramos que la solución tiene la forma que obtuvimos anteriormente si usamos por ejemplo la parte imaginaria.

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \phi).$$

2.2. Otros modelos

Dos modelos satisfacen la ecuación lineal para el péndulo que acabamos de deducir. El primero es el de un cuerpo de masa M atado a un resorte.

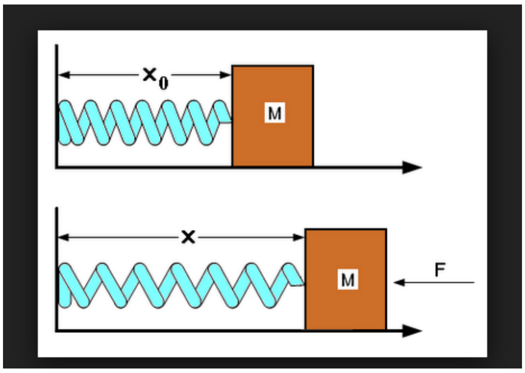

Figura 2: Sistema Masa-Resorte

En este caso la fuerza restauradora aplicada el resorte resulta ser $F_x = -Cx$ donde C es la constante del resorte y x es la posición del cuerpo en el eje x. De nuevo aplicamos la segunda ley de Newton y obtenemos la ecuación

$$M\ddot{x} = -Cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{C}{M}x = 0.$$

Si denotamos $\omega_0^2 = \frac{C}{M}$, la solución al igual que antes se busca de la forma

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi).$$

Si substituimos $t = 0$ obtenemos las siguientes dos ecuaciones.

$$x_0 = A\sin\phi \text{ y } v_0 = \omega_0 A\cos\phi.$$

De estas dos relaciones se pueden obtener tanto A como ϕ.

Pasamos ahora a estudiar un segundo modelo: Circuito $L - C$ esquematizado en el siguiente gráfico.

El modelo lo constituye un circuito formado un condensador C y una bobina L. Por el circuito pasa una corriente de intensidad I. Si denotamos por Q a la carga se tiene que la intensidad de corriente I verifica que $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$, y la ecuación del circuito resulta

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C}Q = -V.$$

La solución general la obtendremos en el curso y consistirá en encontrar una solución de la ecuación homogénea $V = 0$ al que se le añadirá una solución particular.

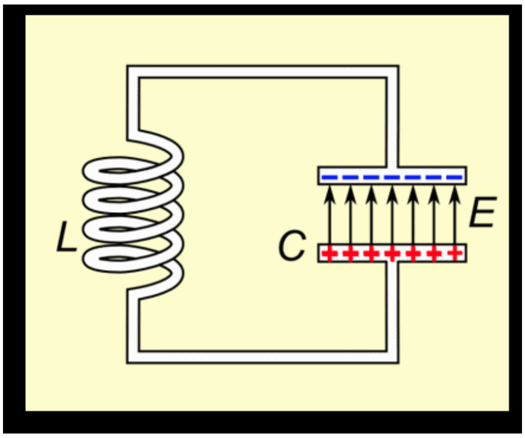

Figura 3: Circuito LC

2.3. Oscilador Armónico amortiguado

En la naturaleza no existen móviles perpetuos, siempre aparecen fuerzas que de una manera u otra amortiguan el movimiento hasta llevar el móvil al reposo si una fuerza externa no lo perturba. Incluiremos entonces una fuerza amortiguadora que en el caso de una masa con un resorte se escribe

$$F_{resorte} + F_{rozamiento} = -Cx - \gamma \dot{x}.$$

Así la ecuación queda

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Aqui $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{M}$ y $\omega_0^2 = \frac{C}{M}$. Buscamos una ecuación de la forma

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Al substituir en la ecuación se obtiene

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \left(\omega_0 t [1 - (\frac{1}{2\omega_0^2 \tau})^2]^{\frac{1}{2}} \right).$$

En el régimen de amortiguamiento débil i.e. $1 << \omega\tau$, se tiene

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \sin \omega_0 t.$$

La ecuación para el oscilador forzado

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t).$$

También puede ser resuelta para $F(t) = F_0 \sin \omega_f t$.

3. Ecuación del calor

En el curso también estudiaremos la solución de algunas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDP). En esta sección hablaremos de la ecuación del calor en una barra infinita. Denotaremos por $u(t, x)$ la temperatura de la barra en el punto x en el instante t. La temperatura satisface la ecuación de difusión siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad t \in \mathbb{R}^+ \text{ and } x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= f(x) \end{aligned} \tag{7}$$

Para resolver este problema de valores iniciales debemos introducir la transformada de Fourier de una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, esto es $||g||_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx < +\infty$. Así la transformada de Fourier de la función g es una función que denotamos por $\hat{g}$ y que se define como

$$\hat{g}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} g(x)dx,$$

se ve que esta función es continua y acotada y $\sup_\gamma |\hat{g}(\gamma)| \leq ||g||_1$. Además se cumple que

$$\hat{g}(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx.$$

Si la función g' existe y $\int_{\mathbb{R}} |g'(x)|dx < +\infty$, podemos calcular su transformada de Fourier, en efecto

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\gamma x} g'(x)dx = e^{-i\gamma x} g(x)|_{-\infty}^{\infty} + i\gamma \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} g(x)dx = i\gamma\hat{g}(\gamma).$$

El primer sumando de la derecha se anula pues como $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|dx < +\infty$, la función g debe tender a cero cuando $x \to \infty$.

De igual manera

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} g''(x)dx = -\gamma^2\hat{g}(\gamma).$$

Intentemos ahora resolver la ecuación del calor.

Aplicando esta transformada a nuestra función de temperatura.

$$\hat{u}(t, \gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} u(t, x)dx.$$

De esta forma si tomamos trasformada de Fourier a ambos lados de la ecuación (7) se obtiene la relación

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\gamma^2 \hat{u}(t,\gamma).$$

La variable aquí es el tiempo t y γ resulta un parámetro fijo. Luego podemos separar variables y obtener

$$\frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -\frac{1}{2}\gamma^2 dt.$$

Integrando esta EDO lineal de primer orden obtenemos

$$\hat{u}(t,\gamma) = \hat{u}(0,\gamma)e^{-\frac{\gamma^2}{2}t}.$$

Para conseguir el primer término del lado derecho basta ver que

$$\hat{u}(0,\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} u(0,x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} f(x)dx = \hat{f}(\gamma).$$

La solución entonces satisface

$$\hat{u}(t,\gamma) = \hat{f}(\gamma)e^{-\frac{\gamma^2}{2}t}. \tag{8}$$

¿Cómo obtener de esta transformada la solución como función de la variable x? Tradicionalmente se debe aplicar una fórmula de inversión que permite obtener la función a partir de la transformada. Nosotros tomaremos otra vía más elemental.

En primer lugar debemos introducir la operación convolución entre dos funciones integrables. La convolución de dos funciones f y g absolutamente integrables es la función $f * g$ definida por

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

Es inmediato ver que la función $f * g$ es también integrable y se verifica que $||f * g||_1 \leq ||f||_1 ||g||_1$, además la convolución es una operación conmutativa. Una propiedad muy importante es la que verifica la transformada de Fourier de la convolución esta es

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma).$$

En efecto

$$\widehat{f * g}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} f * g(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma(x-y)} e^{-i\gamma y} \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dydx$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma(y)} g(y) (\int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma(x-y)} f(x-y) dx) dy = \hat{f}(\gamma)\hat{g}(\gamma).$$

Podemos ahora aplicar este resultado a nuestro problema. En vista de la relación (8) y el teorema de convolución, sabemos que si existe una función $p_t(x)$ cuya transformada es $\hat{p}_t(\gamma) = e^{-\frac{\gamma^2}{2}t}$, se satisface

$$u(t,x) = f * p_t(x) = \int_{\mathbb{R}} p_t(x-y) f(y) dy.$$

En lo que sigue encontraremos esta función. Para ello introduzcamos las funciones

$$\hat{g}(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\gamma x} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx, \text{ y } h(\gamma) = \sqrt{2\pi t}\,\hat{g}(\gamma).$$

Observemos que $\hat{g}$ es la transformada de Fourier de la función $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$.

Calculando la derivada de h obtenemos

$$\frac{dh}{d\gamma} = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-\frac{x^2}{2t}} e^{-i\gamma x} dx = it \int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{x^2}{2t}})' e^{-i\gamma x} dx = -t\gamma h(\gamma).$$

Se cumple así la EDO de primer orden

$$\frac{dh}{d\gamma} = -t\gamma h(\gamma),$$

cuya solución es

$$h(\gamma) = h(0) e^{-\frac{\gamma^2}{2}t}.$$

Pero por definición

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Para calcular esta integral hagamos el cambio $u = \frac{x}{\sqrt{t}}$ de lo cual se obtiene $\sqrt{t}du = dx$ y así

$$h(0) = \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi t}.$$

La última igualdad viene del cálculo de la integral de la Gaussiana. De esta forma $h(\gamma) = \sqrt{2\pi t} e^{-\frac{\gamma^2}{2}t}$ de lo que se concluye que

$$\hat{g}(\gamma) = e^{-\frac{\gamma^2}{2}t}.$$

luego, resulta inmediato que

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

Así
$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y)dy.$$
Más adelante en el curso volveremos a esta y otras EDP.

4. Circuito RLC

Ahora podemos estudiar con la herramienta de la transformada de Fourier la circulación de la corriente f en el siguiente circuito.

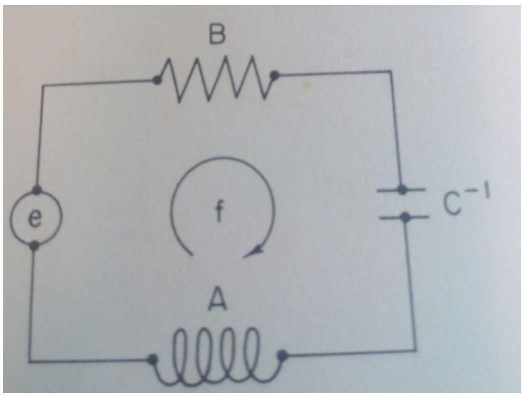

Figura 4: Circuito RLC

La ecuación diferencial asociada es
$$A\ddot{f} + B\dot{f} + Cf = \frac{de}{dt} = \dot{e},\, t > 0, \tag{9}$$
La constante A denota la inductancia de la bobina, C es capacitancia del condensador y B es la resistencia. Buscamos esta vez la solución usando la transformada de Fourier y suponemos que f se anula para $t < 0$ y también esta función y su derivada se anulan cuando $t \to \infty$. De esta forma su transformada de Fourier de $\dot{f}$ es
$$\hat{\dot{f}}(\gamma) = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-i\gamma t}dt = -f(0) + i\gamma \hat{f}(\gamma).$$
Además
$$\hat{\ddot{f}}(\gamma) = -\dot{f}(0) - i\gamma f(0) - \gamma^2 \hat{f}(\gamma).$$
Al tomar transformada en la ecuación (9) y aplicar los resultados anteriores obtenemos
$$[-A\gamma^2 + Bi\gamma + C]\hat{f}(\gamma) = [Ai\gamma + B]f(0) + A\dot{f}(0) + \hat{\dot{e}}.$$

Denotemos por
$$D = -A\gamma^2 + Bi\gamma + C.$$
Despejando se obtiene
$$\hat{f}(\gamma) = \frac{[Ai\gamma + B]}{D} f(0) + \frac{A}{D}\dot{f}(0) + \frac{1}{D}\hat{\dot{e}}.$$
Para simplificar supongamos que $f(0) = 0$, $\dot{f}(0) = 0$ y $A = 1$, $B = 2$, $C = 2$. De esta forma
$$\hat{f}(\gamma) = \frac{1}{D}\hat{\dot{e}},$$
con
$$D = -\gamma^2 + 2\gamma i + 2 = (1 + i(\gamma - 1))(1 + i(\gamma + 1)).$$
Usando descomposición en fracciones simples
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1 + i(\gamma + 1)} - \frac{1}{1 + i(\gamma - 1)}\right],$$
esta suma de fracciones se puede escribir
$$\frac{1}{D} = \frac{1}{2i}\int_0^\infty [e^{-(1-i)t} - e^{-(1+i)t}]e^{-i\gamma t}dt = \int_0^\infty e^{-t}\sin t\, e^{-i\gamma t}dt.$$
Ahora bien usando el teorema de convolución se concluye
$$f(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}\sin(t - s)\dot{e}(s)ds. \tag{10}$$
Esta fórmula se deduce de lo siguiente. Usando que $\dot{e}(s) = 0$ para $s < 0$ entonces
$$f(t) = \int_0^\infty \dot{e}(t - s)e^{-s}\sin s ds,$$
pero $t \geq s$ por la restricción impuesta a la corriente. Luego
$$f(t) = \int_0^t \dot{e}(t - s)e^{-s}\sin s\, ds,$$
y la integral de la derecha es igual a (10).