Práctico 1

Lineales de primer orden

1. Resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $y' - 3y = e^x$.

   b) $y' - 2yx = x$.

   c) $y' + y\cos(x) = \cos(x)\operatorname{sen}(x)$.

   d) $y' - \frac{2}{x}y = x^4$.

2. Hallar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

   a) $y' - 3y = e^{2x}$ con $y(0) = 0$.

   b) $y' - 3y = \cos(x)$ con $y(0) = 0$.

   c) $y' - 3y = e^{2x} + \cos(x)$ con $y(0) = 0$.

3. Resolver:

   a) $y' + y = e^{2x}$ con $y(0) = 1$.

   b) $y' + y = e^x$ con $y(0) = 1$.

   c) $xy' - 2y = x^5$ con $y(1) = 1$.

4. Sea la ecuación diferencial lineal $y' = p(x) + q(x)y$. Supongamos que ϕ_1 y ϕ_2 son dos soluciones. Demostrar que toda otra solución se escribe $\phi = \phi_1 + C(\phi_2 - \phi_1)$, donde C es una constante.

5. La ecuación
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,$$
que se conoce como ecuación de Bernoulli, es lineal para $n = 0$ y $n = 1$. Probar que utilizando el cambio de variable $z = y^{1-n}$ se puede reducir a una ecuación lineal, cualquiera sea n, y aplicar este método para resolver las siguientes ecuaciones:

   a) $xy' + y = x^4y^3$.

   b) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$.

   c) $xy' + y = xy^2$.

   d) $-2y' = xy^3 + y$ con $y(1) = 0$.

   e) $-2y' = xy^3 + y$ con $y(1) = -1$.

6. Una extensión natural de la ecuación diferencial lineal de primer orden $y' = p(x) + q(x)y$ es la ecuación de Riccati
$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2.$$
En general, esta ecuación no se puede resolver por métodos elementales. No obstante, si se conoce una solución particular $y_1(x)$, la solución general tiene la forma
$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$
donde $z(x)$ es la solución general de la ecuación de Bernoulli
$$z' - (q + 2ry_1)z = rz^2.$$

   a) Demostrar esto último.

   b) Hallar la solución general de la ecuación $y' = \frac{y}{x} + x^3y^2 - x^5$, sabiendo que tiene $y_1(x) = x$ como solución particular

   c) Resolver la ecuación $y' = y^2 - 2y - x^4 + 2x + 1$ sabiendo que admite una solución polinomial.

Lineales de segundo orden

7. Resolver las siguientes ecuaciones con los valores iniciales indicados:

   a) $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(1) = e^2$ e $y'(1) = 3e^2$.

   b) $y'' - 6y' + 5y = 0$, $y(0) = 3$ e $y'(0) = 11$.

   c) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.

   d) $y'' + 8y' - 9y = 0$, $y(1) = 2$ e $y'(1) = 0$.

8. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

   a) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$.

   b) $y'' - y' - 6y = 20e^{-2x}$.

   c) $y'' + y' = 10x^4$.

   d) $y'' + 2y' + y = 3$.

9. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea solución de la ecuación $y'' + ay' + 2y = 0$ y determinar la solución general de la ecuación.

10. Hallar $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^{2x} \cos x$ sea solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$. Hallar la solución de la ecuación que verifica $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.

11. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que las ecuaciones diferenciales $y'' + ay' - 2y = 0$ y $y'' - 2y' + ay = 0$ tengan soluciones en común además de $y(x) = 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

12. Resolver con las condiciones iniciales que se indican:

    a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x)$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

    b) $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen}(2x)$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

    c) $y'' + 2y' + 2y = [\cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)]/2$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Justificar con cuidado.

    d) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) + \operatorname{sen}(2x)$ con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$. Justificar con cuidado.

13. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se sabe que $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + g(x)$ es solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = -\cos x$ para todos los valores de C_1 y C_2 reales. Hallar $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Variables separables

14. Resolver las siguientes ecuaciones:

    a) $y' = y^2 - 1$.

    b) $(1 + e^x)yy' = e^x$.

    c) $(x - 4)y^4 - x^3(y^2 - 3)y' = 0$

15. Haciendo el cambio de variable $z = y/x^n$, y escogiendo un valor adecuado de n, demostrar que las ecuaciones diferenciales siguientes pueden transformarse en ecuaciones de variables separables, y resolverlas.

    a) $y' = \dfrac{1 - xy^2}{2x^2 y}$.

    b) $y' = \dfrac{y - xy^2}{x + x^2 y}$.