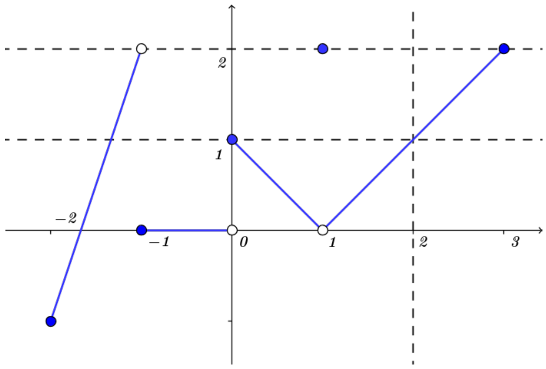
Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Cálculo 1 Anual
2018

Práctico 11

1. Definción de Límite y Propiedades.

1. Considere la función g definida en el intervalo $[-3, 3]$ cuyo gráfico se muestra a continuación:



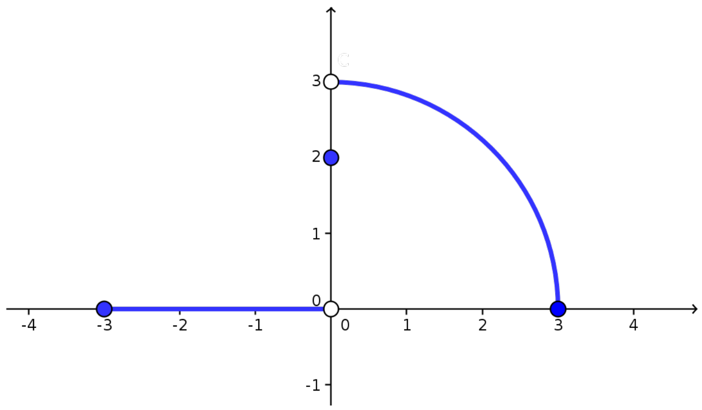
   a) Discutir la existencia de los siguientes límites. En caso positivo calcule y en caso negativo explique por que no existe el límite.

   $$a)\ \lim_{x\to -1} g(x) \qquad b)\ \lim_{x\to 0} g(x) \qquad c)\ \lim_{x\to 1} g(x) \qquad d)\ \lim_{x\to 2} g(x)$$

   b) Calcular

   $$a)\ g(-2) \qquad b)\ g(-1) \qquad c)\ g(0) \qquad d)\ g(1) \qquad e)\ g(2) \qquad f)\ g(3)$$

2. A partir de la función cuya gráfica se muestra aqui explique por que



$$a)\ \lim_{x\to 0} f(x) \neq 0 \qquad b)\ \lim_{x\to 0} f(x) \neq 2 \qquad c)\ \lim_{x\to 0} f(x) \neq 3$$

3. Encontrar $L \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - a| < \delta$, para los valores $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-5}, 10^{-10}$.

   a) $f(x) = x^4$, $a \in \mathbb{R}$ *b)* $f(x) = x^2+5x-2$, $a = 2$ *c)* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ *d)* $f(x) = x^4+\dfrac{1}{x}$, $a = 1$

   e) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ *f)* $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$ *g)* $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, $a = 0$

   h) $f(x) = x[3-\cos\left(x^2\right)]$, $a = 0$ *i)* $f(x) = \dfrac{x}{2-\sin^2(x)}$, $a = 0$ *j)* $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $a = 0$

4. Primer parcial, segundo semestre 2012, MO

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \neq 1$ y $f(1) = 0$. Sea $B^*(1, \delta) = \{x : 0 < |x - 1| < \delta\}$. Se realizan las siguientes afirmaciones:

   (I) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existen $x_1, x_2 \in B^*(a, \delta)$ con $|f(x_1) - f(x_2)| > \epsilon$.

   (II) Dado $\epsilon > 0$ cualquiera existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B^*(1, \delta)$ entonces $|f(x) - 1| < \epsilon$.

   (III) Cualquiera sea $\epsilon > 0$, no es posible hallar $\delta > 0$ tal que si $|x - x'| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x')| < \epsilon$

   (IV) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

   Entonces:

   (A) Solamente la afirmacion (I) es verdadera.

   (B) Solamente la afirmacion (II) es verdadera.

   (C) Solamente las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

   (D) Solamente la afirmacion (IV) es verdadera.

   (E) Solamente las afirmaciones (IV) y (II) son verdaderas.

5. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que

$$\lim_{x\to p} f(x) = a \quad \text{y} \quad \lim_{x\to p} g(x) = b.$$

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la $\lim\limits_{x\to p} \lambda + f(x) = \lambda + a$.

   b) Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim\limits_{x\to p} h(x) = a + b$.

   c) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to p} \tilde{f}(x) = \lambda a$.

   d) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to p} h(x) = ab$.

   e) Probar que si $b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim\limits_{x\to p} h(x) = \dfrac{a}{b}$.

   f) Supongamos que $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ si solo si existe el límite $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$, más aun $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$.

   g) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim\limits_{x\to a} r(x) = 0$.

   h) Suponga que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in I$. Probar que $a \leq b$. Dar un ejemplo de funciones $f(x) < g(x)$ $\forall x \neq p$ y con $a = b$.

   i) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to p} h(x) = a$.

j) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación: Existe el límite de h en p y $\lim_{x\to p} h(x) = b$.

6. Calcular para los siguientes ejemplos $\lim_{x\to a} f(x)$ si f es continua en $\mathbb{R}$

a) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3,\ a = 2$ *b)* $\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1,\ a = -2$ *c)* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0,\ a = 0$

d) $\lim_{x\to 2} \frac{f(x^2)-1}{x} = 1,\ a = 4$ *e)* $\lim_{x\to 1} \frac{f(x^3)-3f(x)}{x^3-3x} = 1, a = 1$ *f)* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x^2-1)}{x^2-1} = 1,\ a = 0$

g) $\lim_{x\to 2} f(x)^2+f(x)+1 = 7,\ a = 2$ *h)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2f(x)-1}}{f(x)} = 1,\ a = 0$ *i)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2f(x)-x}}{f(x)} = 1,\ a = 1$

(Guía de ejercicios: 1,3 a)c)e), 5 b) g) h), 6 a)c)h))

2. Cálculo de límites y continuidad

1. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} x^4+x^3+x^2+x+1$ *b)* $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-1}+1$ *c)* $\lim_{x\to 1} \log(x)$ *d)* $\lim_{x\to 0} \sin(x)+\cos(x)$

e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x+2}{x^2+4}$ *f)* $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$ *g)* $\lim_{x\to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$ *h)* $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$ *i)* $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$

j) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+2}}$ *k)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}}{x}$ *l)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ *m)* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ *n)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$

2. Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to +\infty} x^2-x^3$ *b)* $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+1}{1+x}$ *c)* $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$ *d)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\lceil \frac{1}{x} \rceil}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$ *f)* $\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1}$ *g)* $\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+x}$

h) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *i)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)^2}{x}$ *j)* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}-\frac{1}{[x]}$

k) $\lim_{x\to +\infty} x-[x]$ *l)* $\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *m)* $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^m}{2^x} : m \in \mathbb{R}^+$

3. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x) = [x]$ ($[x]$ es la parte entera de x).

b) $f(x) = [1/x]$.

c) $f(x) = \sqrt{x-[x]}$.

d) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.

e) $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.

4. Determinar la existencia y calcular $\lim_{x\to 0} f(x)$ en los siguientes casos

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es raccional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$ *b)* $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$

5. Primer parcial, primer semestre 2011, Problema 7 parte d.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } x = \frac{1}{n} \text{ con } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   Probar que f no es continua en 0.

6. *a*) Examen mayo 2017, Problema 1, parte 1.b

      Probar que si f es continua en el punto a y g no es continua en el punto a, entonces $f+g$ no es continua en el punto a.

   b) Primer parcial, primer semestre 2014, MO

      Para toda pareja de funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se consideran las siguientes afrimaciones:

      (I) Si f es discontinua en c y g es continua en c, entonces $f+g$ es discuntinua en c

      (II) Si f es discontinua en c y g es continua en c, entonces fg es continua en c

      (III) Si f es discontinua en c y g es discontinua en $f(c)$, entonces $g \circ f$ es discontinua en c

      Indicar la opcion correcta:

      (A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas.

      (B) Ninguna de las afirmaciones es verdadera

      (C) Solo la afirmación (I) es verdadera

      (D) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.

      (E) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.

7. Primer parcial, primer semestre 2010, ejercicio 7 partes a) y b)

   Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n-1}, \text{ para } n \geq 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Bosquejar el grafico de f y deducir que $0 < f(x) < x$, $\forall x \in (0,1]$.

   b) Probar que f es continua en $x = 0$

8. Primer parcial, primer semestre 2012, ejercicio 2.a y 2.b

   a) Si f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$, demostrar que f es continua en cero.

   b) Si g es una función continua en 0 y $|f(x)| \leq |g(x)|$, demostrar que f es continua en cero.

9. Primer parcial, 2005, VF

   Si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones continuas que cumplen $f(r) = g(r),\ \forall r \in \mathbb{Q}$, entonces $f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

10. Calcular las indeterminaciones de logaritmo
$$a)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{x-1} \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^a} : a \geq 1 \qquad c)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(x)}{x} : a \geq 1$$

    Determinar ahora las siguientes indeterminaciones de la inversa de la función log
$$d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} \qquad e)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x}$$

11. **Funciones monótonas**

    Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $a \in \mathbb{R}$.

    a) Probar que dado $d > 0$ el conjunto $C_d = \{f(x) : 0 < x - a \leq d\}$ esta acotado.

b) Verificar que si $d_1 < d_2$ entonces $C_{d_1} \subset C_{d_2}$, en particular $\text{ínf}(C_{d_1}) \geq \text{ínf}(C_{d_2})$ y $\sup(C_{d_1}) \leq \sup(C_{d_2})$

c) Probar que $\sup(C_{d_i}) = f(a + d_i)$ y $\text{ínf}(C_{d_1}) = \text{ínf}(C_{d_2}) \geq f(a)$.

d) Verificar que dado $\epsilon > 0$ existen $y_\epsilon \in C_d$ y $x_\epsilon > a$ tal que $y_\epsilon - \text{ínf}(C_d) = |y_\epsilon - \text{ínf}(C_d)| \leq \epsilon$ y $f(x_\epsilon) = y_\epsilon$. Sea $\delta = x_\epsilon - a > 0$, probar que para todo $x \in C_\delta$ se tiene que $f(x) - \text{ínf}(C_x) = |f(x) - \text{ínf}(C_x)| \leq \epsilon$.

e) Deducir que existe el limite $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$. Mostrar de forma analoga que existe el límite $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

f) Dar un ejemplo de una función monótona tal que no existe el limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

12. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$ calcular el límites:

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x$$

13. **Polinomios**

Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos polinomios, definidos por $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ y $Q(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ con $a_n \neq 0 \neq b_m$
Probar que:

a)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si solo si } n < m$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m} \text{ si solo si } n = m$$

c)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \text{signo}(a_n b_m)\infty \text{ si solo si } n > m$$

d) Suponga que $a \in \mathbb{R}$ es raíz de P y Q. Se tiene así que $P(x) = P_1(x)(x-a)^{n_1}$ y $Q(x) = Q_1(x)(x-a)^{m_1}$, donde $P_1(a) \neq 0 \neq Q_1(a)$, por lo tanto la multiplicidad de a como raíz de P y Q es n_1 y m_1 respectivamente. Probar que:

1)

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \text{ si solo si } n_1 > m_1$$

2)

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \text{ si solo si } n_1 = m_1$$

3)

$$\lim_{x \to a^+} \frac{P(x)}{Q(x)} = +\infty \text{ o } -\infty \text{ si solo si } n_1 < m_1$$

(Guía de ejercicios: 1a)e)i)l), 2a)f)j)l), 4, 5, 6 y 8)

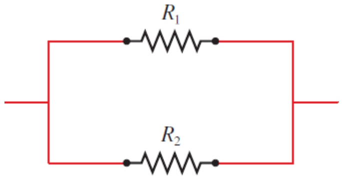
3. Aplicaciones

1. Sea $N(P)$ la cantidad de calculadoras que puede vender una compania manufacturera a un precio P.
Determinar el maximo dominio posible para la función P
Si la función $N(p) = \frac{500}{P^2}$, calcular el $lim_{p \to 0^+} N(P)$. Interpretar este resultado.

2. **Circuitos electricos**

   a) La ley de Ohm para circuitos electricos como el que se muestra en la figura siguiente, establece que $V = RI$. En la ecuación, V es una constante de voltaje, en volts, I es la corriente, en amperes, y R es la resistencia, en ohms. A la empresa en donde trabaja le han pedido que sustituya las resistencias por un circuito en donde V sea de 120 voltios, e I sea de $5 \pm 0{,}1$ amperes¿En que intervalo deben contrarse R para que I esté a menos de 0,1 amperes del valor $I_0 = 5$?

   b) Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 respectivamente, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R esta dada por $R = \dfrac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$.



   Suponga que se fija la resistencia R_2 con $R_2 = 10$ ohms, calcule la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ donde $f(x)$ = la resistencia de tomar $R_1 = x$ ohms.
   Calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interprete estos resultados.