Universidad de la República **Cálculo I Anual**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Práctico 10

1. **Propiedades básicas**

   a) Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y $c \in (a, b)$. Probar que se tiene la igualdad

   $$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

   b) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrables tales que $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$. Probar que para todo par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se tiene que

   $$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables, probar que las funciones $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ son integrables.

   Deducir que si f es integrable entonces $|f|$ también, y además para todo par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ se de la desigualdad $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

3. Sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = x^n$.

   Dada la equipartición de $[0, 1]$ por k intervalos, digamos P_k, probar que

   $$S^*(f, P_K) - S_*(f, P_k) \leq \frac{1}{k}$$

   Utilizar la desigualdad anterior para dar una formula que aproxime $\int_0^1 f_n(x)\,dx$ con una precisión del 99,9 %

4. **Funciones de Lipschitz**

   Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice de Lipschitz o lipschitziana si existe $K > 0$ tal que para todo par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$

   a) Probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable entonces la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es lipschitziana.

   b) Pruebe que una función lipschitziana es integrable.

   c) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipchitziana, no negativa, y $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Probar que si $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$. Dar un ejemplo de función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no negativa, no nula, tal que $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$.

5. Sea f una monótona estricta en $[a, b]$.

   a) Probar que

   $$\int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \ \ \forall\, x \in [a, b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,dt$

6. Sea P una equipartición de $[0,1]$, halle la suma superior e inferior de las siguientes funciones

$$a)\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ 1 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\qquad b)\quad f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ x & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}\qquad c)\quad f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

   Determine cuáles de estas funciones son integrables y cuales no.

7. De ejemplos de funcions $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ integrables, $f\neq g$ y tales que $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$ para todo par $a,b\in\mathbb{R}$.

8. Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ dos funciones integrables, no negativas. Sean P una partición de $[a,b]$, M_i',m_i' los supremos e ínfimos en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$ para f. De forma análoga notamos M_i'',m_i'' para g y $M_i.m_i$ para fg.

   a) Demuestre que $M_i\leq M_i'M_i''$ y $m_i\geq m_i'm_i''$.

   b) Deduzca que
   $$S^*(fg,P)-S_*(fg,P)\leq\sum_{i=0}^{n-1}[M_i'M_i''-m_i'm_i''](t_{i+1}-t_i)$$

   c) Aplicando el hecho de que f, g estan acotadas, notemos M a una cota superior para ambas, demuestre que
   $$S^*(fg,P)-S_*(fg,P)\leq M\left(\sum_{i=0}^{n-1}[M_i'-m_i'](t_{i+1}-t_i)+\sum_{i=0}^{n-1}[M_i''-m_i''](t_{i+1}-t_i)\right)$$

   d) Demuestre que fg es integrable.

   e) Estudie para el caso de f,g funciones integrables cualesquiera.

1. Áreas

a) Calcule el área encerrada por las siguientes funciones en el intervalo establecido

$$a)\quad f(x)=x-x^2,\ g(x)=-x,\ \text{ en } [-1,2]\qquad b)\quad f(x)=x,\ g(x)=\sqrt{x},\ \text{ en } [0,2]$$

$$c)\quad f(x)=\sin(x)+1,\ g(x)=3,\ \text{ en } [0,2\pi]$$

b) Calcule el área delimitada por

$$a)\quad f(x)=x^2,\ g(x)=\frac{x^2}{2}+2\qquad b)\quad f(x)=x^2,\ g(x)=1-x^2\qquad c)\quad f(x)=x^2,\ g(x)=1-x^2,\ h(x)=2$$

$$d)\quad f(x)=x^2-1,\ g(x)=|x|\qquad e)\quad f(x)=x^3-x,\ g(x)=0$$

f) $f(x)=\sqrt{x},\ g(x)=2$, y el eje vertical   *g)* $f(x)=x^2,\ g(x)=x^2-2x+4$, y el eje vertical

h) Exámen, diciembre 2015, MO: $f(x)=x^2-3x+2,\ g(x)=-x^2+2$

c) Verificar que la definición de integral coincide con la de área bajo el gráfico para

   a) un rectángulo apoyado el eje x *b)* un triángulo con base en el eje x

   c) Calcular el área del paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(2,3)$, $(1,4)$, $(3,7)$

d) Acotar el área de un círculo de radio 1 con un error menor al 0,1 %