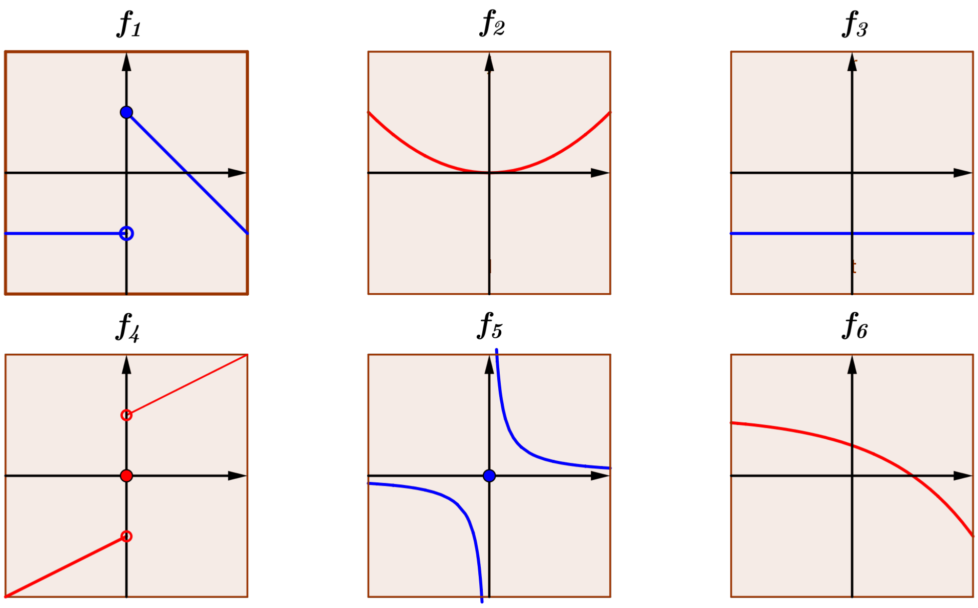
Universidad de la República **Cálculo 1 Anual 2018**
Facultad de Ingeniería - IMERL

Apendice Práctico 7

1. Funciones crecientes

- Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que f es **creciente** si $f(x) \leq f(y)$ para todo par de reales $x \leq y$.
- Decimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** si $f(x) < f(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$.
- Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **decreciente** si $f(x) \geq f(y)$ para todo par de reales $x \leq y$.
- Decimos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **estrictamente decreciente** si $f(x) > f(y)$ para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$.

1. Verificar que si f es estrictamente creciente entonces es creciente. Dé un ejemplo de una función creciente y no estrictamente creciente.
2. Dadas las funciones f_i con las siguientes gráficas determinar cuáles son crecientes, decrecientes, estrictamentes crecientes, estrictamentes decrecientes o ninguna de estas.



3. Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son estrictamente crecientes entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ también lo son.
4. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente, y $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$.
   a) Probar que el conjunto $\{f(x) : x \in [a, b]\}$ está acotado
   b) Probar que $\sup\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(b)$.

c) Probar que se cumplen las siguientes desigualdades.

$$\sup\{f(x) : x < a\} \leq f(a) \leq \text{ínf}\{f(x) : x > a\}$$

d) Dé ejemplos donde las desigualdades sean estrictas.

5. Probar que si una función es estrictamente creciente entonces es inyectiva. Vale lo mismo si f es creciente?

2. Funciones lipchizianas

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **lipchiziana** si:

$$\exists \quad K \in \mathbb{R} : \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \text{para todo par} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

1. Bosquejar las siguientes funciones y determinar cuáles son lipchizianas.

$$a) \quad f(x) = x \qquad b) \quad f(x) = |x| \qquad c) \quad f(x) = x^2 \qquad d) \quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

2. Probar que si $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones lipchizianas entonces $f \circ g$, $f + g$ son lipchizianas. Estudiar qué ocurre con fg.

3. Interpretar geométricamente la condición de que f sea lipchiziana.

3. Función Potencia

Definición función potencia

En este ejercicio se definirá la función $f(x) = 2^x$ y se probaran las propiedades básicas de la potencia.

1. Definimos $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por inducción como

   - $f_1(1) = 2$
   - $f_1(n + 1) = 2f_1(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   a) Probar que $f(n + m) = f(n)f(m)$ para todo par $n, m \in \mathbb{N}$

   b) Probar que la función f_1 es estrictamente creciente y $Im(f_1)$ no está acotada

2. Para definir la función en los enteros simplemente invertimos. Sea $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_2(n) = \begin{cases} f_1(n) & \text{si } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{f_1(n)} & \text{si } -n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   a) Probar que $f_2(n + m) = f_2(n)f_2(m)$, $\forall n, m \in \mathbb{Z}$

   b) Probar que la función f_2 es creciente

3. Veamos ahora cómo definir f en $\mathbb{Q}$, surge así el problema de cómo definir, por ejemplo $2^{\frac{1}{2}}$, Sea $f_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma: dado $\frac{p}{q}$ fracción irreducible $f_3\left(\frac{p}{q}\right) = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^q \leq f_2(p)\}$.

a) Verificar que la función f_3 es una extensión de f_2, es decir $f_2(n) = f_3(n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

b) Probar que $f_3(x + y) = f_3(x)f_3(y)$

c) Probar que la función f_3 es creciente

4. Estamos ahora en condiciones de definir f como función real

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sup \{y \in \mathbb{R} : y = f_3(z) \text{ tal que } z \leq x\}$$

   a) Verificar la que función f esta bien definida.

   b) Probar que la función f es una extensión de f_3, es decir $f(x) = f_3(x)$, $\forall x \in \mathbb{Q}$

   c) Probar que la función f es creciente

   d) Probar que $f(x + y) = f(x)f(y)$

   e) Probar que dado $a \in \mathbb{R}$ se cumplen las igualdades $\sup\{f(x) : x < a\} = f(a) = \inf\{f(x) : x > a\}$

5. Verificar que la definición se puede adaptar a cualquier base. Explique qué cambiaría para definir 3^x.

6. Dadas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$ probar que $f(x)g(x) = (ab)^x$.