**Universidad de la República** **Cálculo 1 Anual 2018**
**Facultad de Ingeniería - IMERL**

# Práctico 7

## 1. Cotas, Supremo e Infimo

1. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$, además hallar supremo e ínfimo y estudiar si son máximos o mínimos.

   *a*) $[-1,1]$ *b*) $(2,5)$ *c*) $(2,6]$ *d*) $[-10,-2)$ *e*) $[0,0]$

   *f*) $[2,5]\cup[0,1]$ *g*) $[-1,1]\cap(0,2)$ *h*) $[0,5)\setminus(1,2)$ *i*) $[1,2]\setminus(1,2)$

   *j*) $[1,2]\setminus[3,4]$ *k*) $([1,2]\cup[3,4])\cap[0,3]$ *l*) $[1,2]\cup([3,4]\cap[0,3])$

2. Hallar supremo e ínfimo de los siguientes conjuntos y estudiar si son máximos o mínimos respectivamente.

   *a*) $\left\{x\in\mathbb{R} : x^2\leq 3\right\}$ *b*) $\left\{x\in\mathbb{R}^+ : (x-1)(x-2)<0\right\}$ *c*) $\left\{x\in\mathbb{R} : \dfrac{3x+1}{x-2}\geq 0\right\}$

   *d*) $\{(-1)^n : n\in\mathbb{N}\}$ *e*) $\left\{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n : n\in\mathbb{N}\right\}$

   *f*) $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ *g*) $[1,2]\cap\mathbb{Q}$ *h*) $\{x : x^2+x-1\leq 0\}\cap\mathbb{Q}$

   *i*) $\{(-1)^n e^n : n\in\mathbb{Z}\}$ *j*) $\left\{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n e^{-n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

3. *a*) Primer parcial, primer semestre 2014, MO
   Sea $A = A_1\cup A_2$, donde:

   $$A_1=\left\{\frac{1}{2n-1}-1 : n\geq 1\right\}, A_2=\left\{\frac{1}{2n}+1 : n\geq 1\right\}$$

   Entonces:
   (A) $\sup(A)=2, \inf(A)=-1$.
   (B) $\max(A)=\frac{3}{2}, \inf(A)=-1$.
   (C) $\sup(A)=\frac{3}{2}, \inf(A)=-1$ pero $A$ no tiene máximo ni mínimo.
   (D) $\sup(A)=\frac{3}{2}, \inf(A)=-1$; $A$ tiene máximo pero no tiene mínimo.
   (E) $\sup(A)=\frac{3}{2}, \inf(A)=-1$; $A$ tiene mínimo pero no tiene máximo.

   *b*) Primer parcial, segundo semestre 2014, MO
   Sea $A=A_1\cup A_2$, donde, $A_1=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ y $A_2=\{x\in\mathbb{R} : x=\cos(n\frac{\pi}{2}), n\in\mathbb{N}, n\geq 0\}$
   (A) $\sup(A)=1$ e $\inf(A)=-1$; $A$ tiene mínimo pero no tiene máximo.
   (B) $\sup(A)=1$ e $\inf(A)=-1$; $A$ tiene máximo pero no tiene mínimo.
   (C) $\sup(A)=1$ e $\inf(A)=-1$ pero $A$ pero no tiene máximo ni mínimo.
   (D) $\sup(A)=2$ e $\inf(A)=-1$.
   (E) $\max(A)=1$ y $\min(A)=-1$.

4. **Consecuencias básicas de la definición de supremo**

   *a*) Probar que el axioma de completitud (existencia de supremo para conjuntos acotados superiormente) es equivalente a la propiedad "todo conjunto acotado inferiormente tiene ínfimo".

   *b*) Sea $A$ un conjunto no vacío, acotado superiormente y $\alpha = \sup(A)$. Probar que para todo $\delta > 0$, existe $a_\delta \in A$ tal que $\alpha - \delta < a_\delta \leq \alpha$.

5. Sea $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$. Probar que $A$ está acotado inferiormente. Notemos $\alpha$ al ínfimo de $A$.

   *a*) Verificar que $\alpha \geq 0$.

   *b*) Verificar que si $\alpha$ es una cota inferior entonces $2\alpha$ también lo es.

   *c*) Deducir que $\alpha = 0$. Deducir que para todo $x > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x > \frac{1}{n}$.

6. A partir del ejercicio anterior se pueden deducir algunas propiedades.

   *a*) Probar que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente. Deduzca que para $x \in \mathbb{R}$, existen $m$ y $n$ enteros, tales que $m < x < n$.

   *b*) Dado $x_0 \in \mathbb{R}^+$ definimos el conjunto $A_{x_0}$ como $A_{x_0} = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{x_0}{n}$ para $n \in \mathbb{N}^+\}$. Probar que $\text{ínf}(A_{x_0}) = 0$.
   Deducir que para cualquier par de puntos $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ existe $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $x < z < y$.

7. Primer parcial, primer semestre 2016, MO

   Sea $A = \{\frac{m}{n} : 0 < m < n, m, n \in \mathbb{N}\}$

   *a*) A está acotado superiormente, tiene supremo, pero no máximo.

   *b*) A no está acotado superiormente, por lo tanto no tiene supremo.

   *c*) A tiene supremo, que es máximo.

   *d*) A no esta acotado superiormente, no tiene máximo, pero tiene supremo.

   *e*) A está acotado superiormente, pero no tiene supremo.

8. (*) Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ no vacíos y $\alpha \in \mathbb{R}$, se define $\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$ y $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

   *a*) 1) Si $A \subset B$ y $B$ es acotado demostrar que $\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$.
   2) Dar un ejemplo donde $A \subset B$, $B$ acotado e $\text{ínf}(B) = \text{ínf}(A) < \sup(A) < \sup(B)$.

   *b*) 1) Si $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, demostrar que $\sup(A) \leq \text{ínf}(B)$.
   2) Dar un ejemplo donde $a \leq b$, $\forall a \in A$ y $\forall b \in B$, y $\sup(A) = \text{ínf}(B)$.

   *c*) 1) Probar que si $A$ y $B$ son acotados entonces $\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}(A) + \text{ínf}(B)$ y $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
   2) Si $A = (0, 2]$ y $C = (0, 3]$, encontrar un conjunto $B$ tal que $A + B = C$. Verificar con estos conjuntos $A$ y $B$ las igualdades demostradas en el item anterior.

   *d*) 1) Probar que si $A$ es acotado y $\alpha > 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha \sup(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$.
   2) Probar que si $A$ es acotado y $\alpha < 0$ entonces $\sup(\alpha A) = \alpha\, \text{ínf}(A)$ e $\text{ínf}(\alpha A) = \alpha \sup(A)$.

## 2. Número real

1. Probar que $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ son irracionales. ¿Por qué esto no se aplica a $\sqrt{4}$?
2. Sean $a \in \mathbb{Q}$ y b $\in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que $a + b \notin \mathbb{Q}$. ¿Se puede decir lo mismo de ab?
3. Dé ejemplos de pares de números irracionales (digamos $a$, $b$) tal que $a + b$ y $ab$ sean racionales.
4. Probar que dados $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$ existe $z \in \mathbb{R}$ con $x < z < y$. Repetir esta parte para $x, y, z \in \mathbb{Q}$.
5. (*) Demuestre que si $x = p + \sqrt{q}$ donde $p, q$ son racionales entonces dado $m \in \mathbb{N}$ existen $a, b \in \mathbb{Q}$ tal que $x^m = a + b\sqrt{q}$.

   Demuestre además que $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

## 3. Funciones reales

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$, es decir el mayor entero menor o igual a $x$.

   Bosquejar las funciones

   *a)* $f(x)$  *b)* $f_1(x) = x - f(x)$  *c)* $f_2(x) = \sqrt{f_1(x)}$  *d)* $f_3(x) = f(x) + f_2(x)$

   *e)* $f_4(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$  *f)* $f_5(x) = \frac{1}{f_4(x)}$

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que los conjuntos $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ y $\{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ están acotados.

   Fijo un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, probar que

   $$\sup\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} + \sup\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   $$\text{ínf}\{(f+g)(x) : x \in [a,b]\} \geq \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} + \text{ínf}\{g(x) : x \in [a,b]\}$$

   Dar un ejemplo de una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ esté acotado y $f(x) < \sup(\text{Im}(f))$ para todo $x \in [a, b]$