

## Práctico 5

### Propiedades Básicas de los Números Reales

1. Demostrar a partir de los axiomas de cuerpo:

a) Si  $ab = 0 \rightarrow a = 0$  o  $b = 0$ .    b)  $(-a)b = -(ab)$  y  $(-a)(-b) = ab$ .

c)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$  si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .    d)  $\frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$  si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .    e)  $-0 = 0$ .

f)  $-1 = 1$ .    g)  $-(a-b) = -a+b$ .    h)  $(a-b)+(b-e) = a-e$ .    i) Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$   $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ .

j)  $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$  si  $b \neq 0$ .    k)  $\frac{a}{b} - \frac{e}{d} = \frac{ad - be}{bd}$  si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .

2. Demostrar usando los axiomas de orden y de cuerpo:

a) Si  $a < b$  y  $c < d \Rightarrow a + c < b + d$ .    b) Si  $a < b \Rightarrow -b < -a$ .

c) Si  $a > 1 \Rightarrow a^2 > a$ .    d) Si  $0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$ .

e) Si  $a, b \geq 0$  y  $a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$ .    f) Si  $0 \leq x < y \Rightarrow x^3 \leq y^3$ .

3. Probar las siguientes desigualdades asociadas a la desigualdad triangular.

a)  $|a + b| \leq |a| + |b|$     b)  $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

c)  $|a + b| \geq |a| - |b|$     d)  $|ab| \leq a^2 + b^2$

4. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función afín, esto es  $f(x) = ax + b$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

a) Probar que si  $b = 0$  entonces para todo par  $x, z \in \mathbb{R}$  se tiene que  $f(x + z) = f(x) + f(z)$  y  $f(xy) = xf(y)$ . Mostrar que esto no es válido si  $b \neq 0$ .

b) Probar que  $f$  es biyectiva y determinar su inversa.

c) Determinar qué funciones afines conmutan con  $g(x) = x + 2$ . Repetir para  $h(x) = 2x$ .