

Práctico 5

Propiedades Básicas de los Números Reales

1. Demostrar a partir de los axiomas de cuerpo:

$$a) \quad \text{Si } ab = 0 \rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0. \quad b) \quad (-a)b = -(ab) \text{ y } (-a)(-b) = ab.$$

$$c) \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0. \quad d) \quad \frac{a}{b} \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \text{ si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0. \quad e) \quad -0 = 0.$$

$$f) \quad -1 = 1. \quad g) \quad -(a-b) = -a+b. \quad h) \quad (a-b)+(b-e) = a-e. \quad i) \quad \text{Si } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0 \quad (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}.$$

$$j) \quad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \text{ si } b \neq 0. \quad k) \quad \frac{a}{b} - \frac{e}{d} = \frac{ad - be}{bd} \text{ si } b \neq 0 \text{ y } d \neq 0.$$

2. Demostrar usando los axiomas de orden y de cuerpo:

$$a) \quad \text{Si } a < b \text{ y } c < d \Rightarrow a + c < b + d. \quad b) \quad \text{Si } a < b \Rightarrow -b < -a.$$

$$c) \quad \text{Si } a > 1 \Rightarrow a^2 > a. \quad d) \quad \text{Si } 0 < a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2.$$

$$e) \quad \text{Si } a, b \geq 0 \text{ y } a^2 < b^2 \Rightarrow a < b. \quad f) \quad \text{Si } 0 \leq x < y \Rightarrow x^3 \leq y^3.$$

3. Probar las siguientes desigualdades asociadas a la desigualdad triangular.

$$a) \quad |a + b| \leq |a| + |b| \quad b) \quad |a - b| \leq |a - c| + |c - b|$$

$$c) \quad |a + b| \geq |a| - |b| \quad d) \quad |ab| \leq a^2 + b^2$$

4. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función afín, esto es $f(x) = ax + b$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

a) Probar que si $b = 0$ entonces para todo par $x, z \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x + z) = f(x) + f(z)$ y $f(xy) = xf(y)$. Mostrar que esto no es válido si $b \neq 0$.

b) Probar que f es biyectiva y determinar su inversa.

c) Determinar qué funciones afines conmutan con $g(x) = x + 2$. Repetir para $h(x) = 2x$.