Universidad de la República **Cálculo 3**

Facultad de Ingeniería - IMERL

17 DE JULIO DE 2018

Nro de Examen	Cédula	Apellido y nombre

Para aprobar el examen se deberá sumar como mínimo 50 puntos y hacer correctamente un ejercicio completo.

Duración del examen 4 horas.

Todo resultado teórico que utilice en la resolución de los problemas debe estar adecuadamente justificado.

Problema I (35 pts.)

Considera la superficie S que se obtiene revolucionando el gráfico de la función derivable $z = f(x)$ con $0 \leq a \leq x \leq b$ alrededor del eje z.

1. Parametriza S.
2. Demuestra que el área de S se puede calcular como:
$$2\pi \int_a^b u\sqrt{1+(f'(u))^2}du.$$
3. Halla el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 16$.

Problema II (35 pts.)

1. Prueba que un campo irrotacional definido en un subconjunto simplemente conexo del plano es de gradientes.
2. Considera la función $\gamma : I\!R - \{-1, 1\} \to I\!R^2$ definida por
$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{t^2-1}, t + e^t\right).$$
   a) Realiza un bosquejo del recorrido de γ.
   b) Sea $\gamma_1 = \gamma|_{(1,+\infty)}$, es decir γ_1 es la restricción de γ al intervalo $(1, +\infty)$. Sean A, B dos puntos del recorrido de γ_1 con argumento (el de los números complejos) $\pi/4$ y $\pi/2 - \pi/32$, respectivamente. Prueba que los puntos A, B son únicos.
   c) Sea γ_2 la restricción de γ_1 al intervalo $[t_1, t_2]$ donde $\gamma_1(t_1) = A$ y $\gamma_1(t_2) = B$. Considera el campo $F : I\!R^2 - \{(0, 0)\} \to I\!R^2$ definido por
$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$
   Calcula la circulación de F a lo largo de γ_2, justificando la respuesta.

Problema III (30 pts.)

1. Considera un campo $F : I\!R^3 \to I\!R^3$ de clase C^1 y tal que existe un versor $v \in I\!R^3$ y un punto $p \in I\!R^3$ tales que $\langle Rot(F)(p), v\rangle$ es distinto de cero. Prueba que en el plano por p ortogonal a v existen curvas

cerradas simples de diámetro arbitrariamente pequeño tales que la circulación de F a lo largo de ellas es diferente de cero.

2. Considera un campo plano F de clase C^1 como el que muestra la Figura 1, es decir: se anula sobre el eje x, es constante sobre cada recta $y = y_0$, tiene el sentido de x creciente si $y_0 > 0$ y el opuesto si $y_0 < 0$ y su módulo crece continuamente con el crecimiento de $|y_0|$.

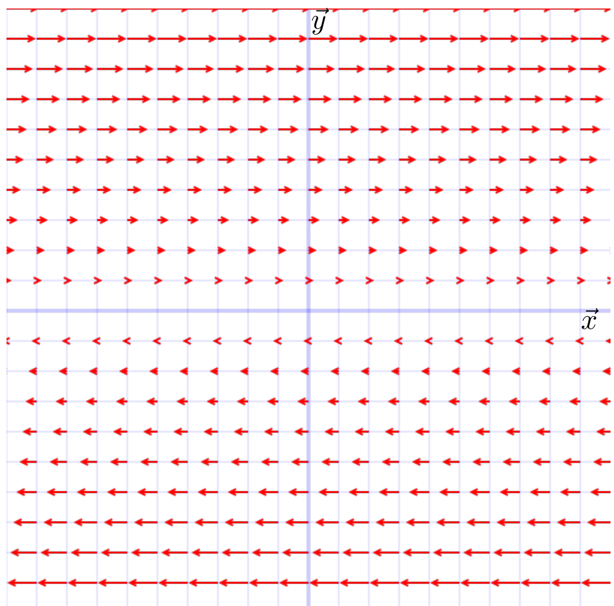


Figura 1.

   a) Prueba que F tiene divergencia nula en todo punto.
   b) Considera un campo de la forma $F(x, y) = (f(y), 0)$. Encuentra condiciones para f de tal forma que el campo F sea como el de la Figura 1.
   c) Prueba que para todo cuadrado de lados paralelos a los ejes y centrado en el origen la circulación de un campo como el de la figura es no nula.
   d) ¿Lo concluido en la parte anterior es suficiente para afirmar que el rotor del campo F en el origen es no nulo? Justifica tu respuesta.
   e) Investiga si todo lo anterior te permite decir algo de la veracidad o falsedad del recíproco de lo probado en la primera parte del ejercicio

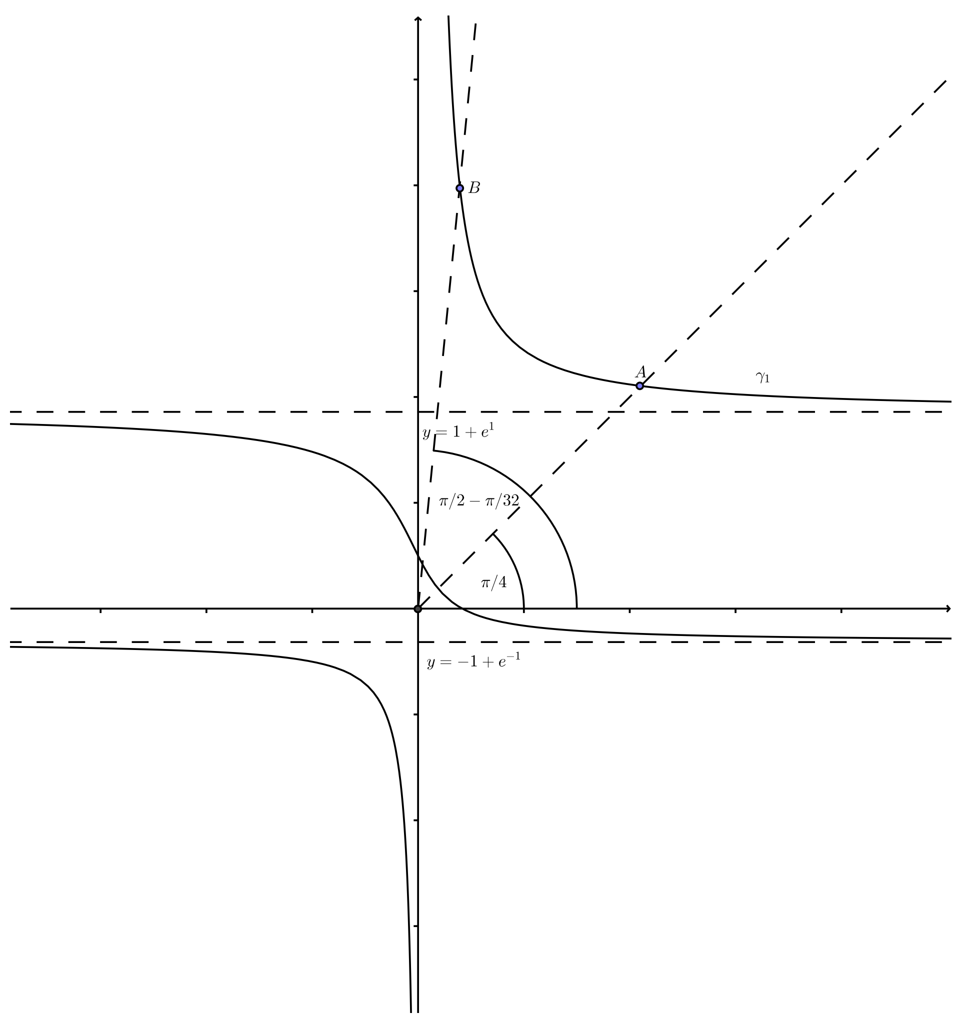
Esquema de solución.

Problema I.

1. Una parametrización posible es de la forma $\varphi : [a,b] \times [0, 2\pi] \to I\!R^3$ dada por
$$\varphi(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), f(u)).$$
2. $\text{Área}(S) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| du\, dv$. $\varphi_u \wedge \varphi_v = u(-f'(u)\cos(v), -f'(u)\sin(v), 1)$. Por tanto $\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = u\sqrt{1 + (f'(u))^2}$ y se cumple lo pedido.
3. Intentamos llevar el problema a las condiciones anteriores. En este caso, tomamos $y = 0$, $x \in [0, 4]$ y $z = x^2$. Por tanto el área nos queda $2\pi \int_0^4 u\sqrt{1 + (2u)^2} du$. y esta integral es sencilla de calcular.

Problema II.

1. Ver teórico.
2. *a*) Bosquejo



   b) Mirando los signos de x' e y' se concluye lo pedido.

c) Un potencial escalar posible de F es $f(x,y) = \arctan(y/x)$ (que no está definido en la recta $x = 0$), por tanto consideramos un dominio simplemente conexo que contenga a γ_2 y que no se intersecte con la recta $x = 0$. Por tanto estamos habilitados a aplicar Barrow y $\int_{\gamma_2} F\, ds = f(B) - f(A)$.

Problema III.

1. Supongamos que $\langle Rot(F)(p), v\rangle > 0$, por la continuidad de $Rot(F)$ y del producto interno, existe U entorno de p tal que $\langle Rot(F)(q), v\rangle > 0$. Al aplicar la interpretación intrínseca del rotor obtenemos $0 < \langle Rot(F)(p), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{A(S_t)} \int_{\partial S_t} F \cdot ds$, donde S_t es un disco de radio t. Como el denominador es siempre positivo, para t suficientemente pequeño obtenemos que $\int_{\partial S_t} F \cdot ds > 0$.
2. a) Aplicando la interpretación intrínseca de la divergencia y tomando como curva un cuadrado se deduce lo pedido.
   b) $f(y)$ de clase C^1, creciente y $f(0) = 0$ es un campo que cumple estas condiciones.
   c) Separamos el cuadrado en sus 4 lados, en los lados paralelos al eje y la circulación es cero, en los lados paralelos al eje x la circulación es igual y no nula (el vector tangente o bien tiene igual sentido en ambos casos o bien sentido opuesto en ambos casos), por tanto la circulación en el cuadrado es no nula.
   d) No necesariamente, $\langle Rot(F)(p), v\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{1}{A(S_t)} \int_{\partial S_t} F \cdot ds$ y siendo tanto el numerador como el denominador no nulos, el límite puede dar nulo, por ejemplo si consideramos $F(x,y) = (y^3, 0)$, $Rot(F)(0,0) = (0,0)$.
   e) El recíproco no se cumple, queda evidenciado en la parte anterior.