Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL: Cálculo III

SEGUNDO PARCIAL - 27 DE JUNIO DE 2018.   DURACIÓN: 3.5 HORAS

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

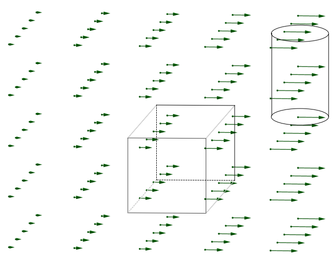
Ejercicio 1
Considera $\vec{X}_k : \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z) : \; x = y = 0\} \to \mathbb{R}^3$ con $k > 0$, definido por

$$\vec{X}_k = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)^k}, \frac{y}{(x^2+y^2)^k}, 0 \right).$$

1. Prueba que $\vec{X}_k$ es solenoidal si y solamente si $k = 1$.
2. Calcula el flujo de $\vec{X}_1$ en el cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con z variando en el intervalo $[-1, 1]$ orientado con la normal exterior.
3. Investiga si $\vec{X}_1$ es de rotores justificando la respuesta. Sugerencia: intenta encontrar un potencial vector con tercera coordenada nula.

Ejercicio 2
1. Sea S(t) una esfera de radio $t > 0$ con centro en el punto $p \in \mathbb{R}^3$ y representemos con $V(t)$ la región acotada del espacio con borde $S(t)$. Considera $\vec{X}$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Prueba que
$$div(\vec{X})(p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{Vol(V(t))} \int_{S(t)} \langle \vec{X}, n \rangle \, dA,$$
donde n representa la normal exterior a $S(t)$.
2. Sea $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo de clase C^1. Prueba que X es de rotores si y sólo si el flujo en cualquier esfera (con centro y radio cualquiera) es cero.

Ejercicio 3
Considera un campo $\vec{X}$ (como el de la figura) definido en $\mathbb{R}^3$, que no se anula en ningún punto, de clase C^1, con dirección y sentido constante, con módulo constante en cada plano ortogonal al campo y módulo creciente en cada recta colineal al campo y orientada como éste.



1. Se considera un cubo $\mathcal{C}_1$ tal que una de sus caras es ortogonal al campo, y un cilindro $\mathcal{C}_2$ con tapas y tal que la normal en las tapas es ortogonal al campo (ver figura).
   Prueba que el flujo del campo $\vec{X}$ sobre el cubo y sobre el cilindro con tapas (con normal exterior en ambos casos) es positivo.
2. Encuentra explícitamente un campo $\vec{X} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en las condiciones de la figura y calcula su divergencia. Para ello define un sistema de coordenadas conveniente.
3. ¿Un campo en las condiciones de la figura puede ser solenoidal? Justifica tu respuesta.