ALN - SVD

In. Co.
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

- Índice
  - Definición
  - Propiedades de SVD
  - Ejemplo de SVD
  - Métodos para calcular SVD
  - Aplicaciones de SVD

- Repaso de matrices:
  - Una matriz $A \in C^{mxm}$ es <u>Unitaria</u> si sus columnas forman una **base ortonormal** de vectores de C^m.

  - Una matriz $A \in R^{mxm}$ es <u>Ortogonal</u> si sus columnas forman una **base ortonormal** de vectores de R^m.
    - La inversa de una matriz unitaria es igual a su transpuesta
    - Las transformaciones por matrices unitarias conservan la norma y el producto escalar

Definición SVD

- Sea *m*, *n* enteros positivos y $A \in C^{mxn}$

  Entonces una descomposición en valores singulares de A, es una factorización

$$A = U \Sigma V^H$$

Tal que $U \in C^{mxm}$ y $V \in C^{nxn}$ son unitarias

Σ es diagonal de tamaño *m x n*.

Definición SVD (Cont.)

- Los elementos no nulos de la diagonal de Σ son los **VALORES SINGULARES** de la matriz A

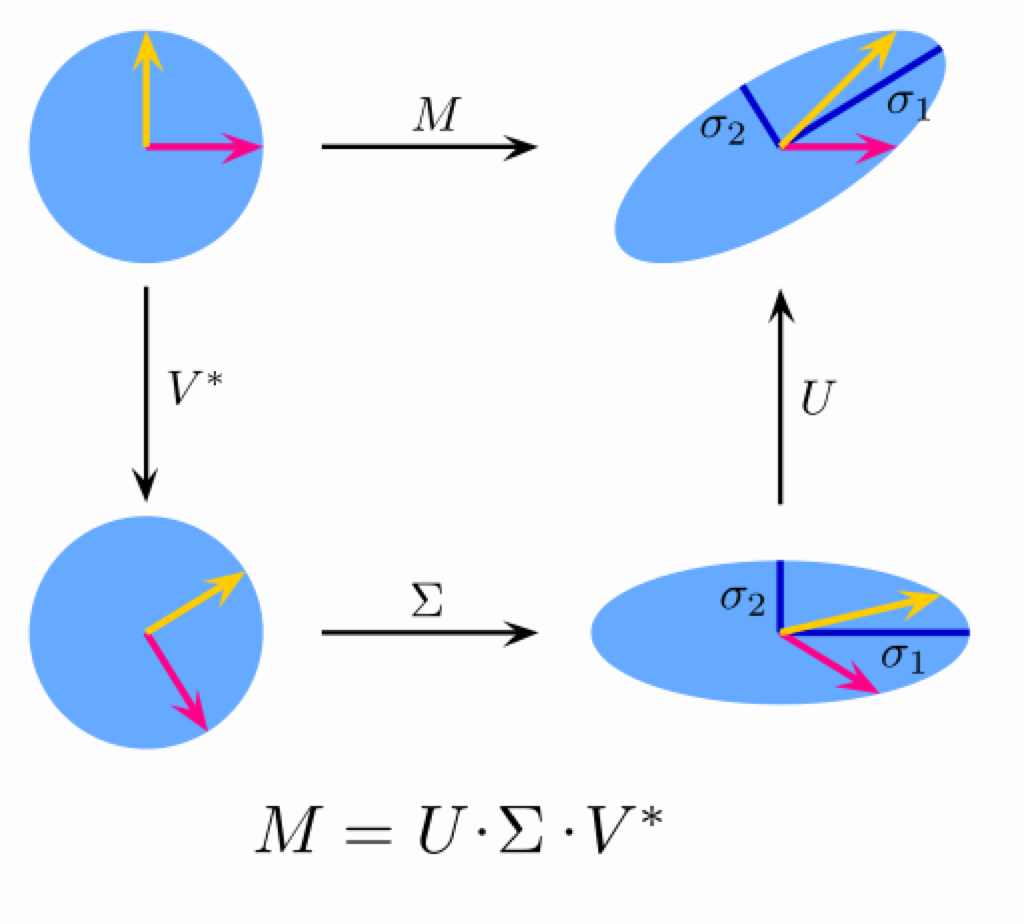
- Se denotan como σ_i

- A los vectores $u_1, \ldots, u_m$ y $v_1, \ldots, v_n$ que forman las columnas de U y V respectivamente, se les llama: vectores singulares de A por la izquierda y por la derecha.

- Si A tiene entradas reales se cambia “matriz unitaria” por “matriz ortogonal”

- **Gráficamente**

- Las trasformaciones unitarias no afectan la norma de los vectores (son rotaciones).
- En la figura se puede ver el efecto de aplicar la matriz M al círculo unidad.
- Luego se muestra cómo llegar a M desde el círculo unidad a través de la SVD.



Teorema de SVD

- Toda matriz $A \in R^{mxn}$ admite una descomposición en valores singulares.

- Además, los valores singulares están determinados en forma única.

Propiedades valores singulares

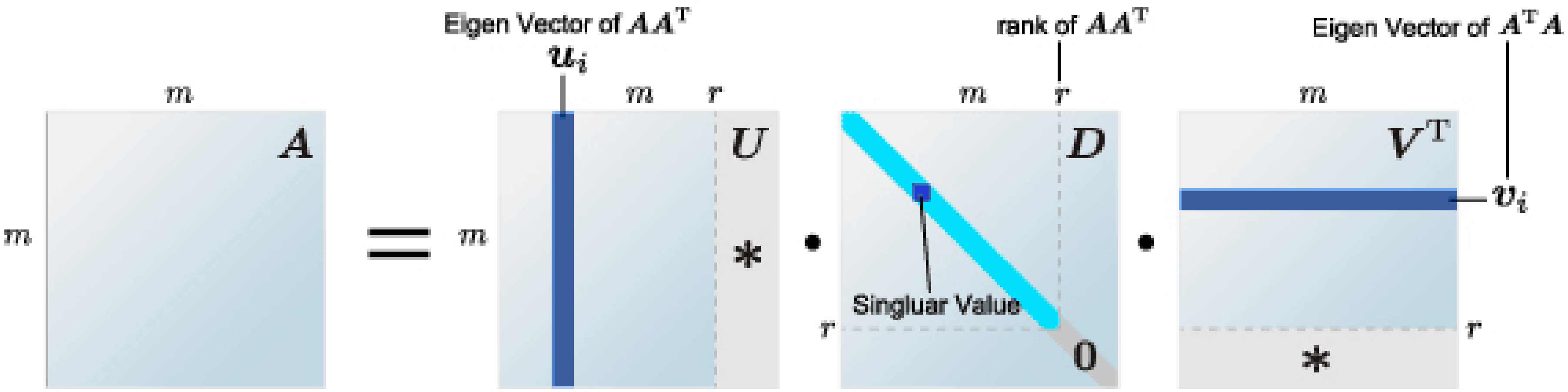
- Los valores singulares $\neq 0$ de $A \in C^{mxn}$ son las raíces cuadradas positivas de los **valores propios** $\neq 0$ de $A^H A$ y también de los de AA^H (Si estamos en los reales A^H pasa a ser A^T)
  - Dem:
  - $A = U\Sigma V^t$

    $A^tA = V\Sigma^t U^t U\Sigma V^t = V(\Sigma^t\Sigma)V^t$

    $AA^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U(\Sigma\Sigma^t)U^t$

Propiedades valores singulares

$$A = UDV^{\mathrm{T}}$$



Propiedades de valores singulares (cont)

- rang(A) = cantidad de valores singulares de A distintos de 0

- El valor absoluto de det(A) = $\sigma_1 \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot \sigma_n$ siendo A cuadrada de tamaño *n*

- Si $\sigma_n \neq 0$ entonces σ_1/σ_n es el número de condición de la matriz

Propiedades valores singulares (cont)

- Si $A \in C^{n x n}$ es invertible y $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n$ son sus valores singulares. Entonces los valores singulares de A^{-1} son $$\frac{1}{\sigma_n} \geq \cdots \geq \frac{1}{\sigma_1}$$

Propiedades valores singulares (cont)

- Todo elemento de la diagonal σ_i cumple

$$Au_i = \sigma_i v_i \qquad A^T v_i = \sigma_i u_i$$

- Siendo u_i la columna U correspondiente a σ_i
- Siendo v_i la columna V correspondiente a σ_i

Propiedades valores singulares (cont)

- $A = U \Sigma V^H$ es una descomposición de A en valores singulares y rang(A) = r,

  entonces $$A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^H$$

  u y v son los vectores columna de U y V respectivamente

Propiedades valores singulares (cont)

- La descomposición se puede representar como la suma de r matrices de rango 1.

- Este término $\sigma_i u_i v_i^H$ es conocido también como tripleta singular.

- El rango de la matriz A, nos da el máximo número de tripletas necesarias.

Aproximación de A por A_k

- A_k es la mejor aproximación de A, para cualquier norma unitariamente invariante
  - P. ej: la norma Frobenius es unitariamente invariante

- Teorema:
  - Dada la SVD de A con rango r, $p = min(\mathrm{m}, \mathrm{n})$ y $r < p$
  - Sea: $A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ con $k < r$

  Entonces $$\min_{r(B)=k} \|A - B\|_F^2 = \|A - A_k\|_F^2 = \sigma_{k+1}^2 + \ldots + \sigma_p^2$$

Métodos para calcular SVD en matrices densas

- El método de Golub - Kahan – Reinsch
- Es un método eficaz basado en la iteración QR.
- Se divide en 2 fases.

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Primera fase

- Primera fase
  - Se trata de reducir la matriz A a una bidiagonal mediante una secuencia de transformaciones ortogonales de Householder.

$$Q_B^T A \Pi_B = B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} d_1 & f_2 & & & \\ & d_2 & f_3 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & f_n \\ & & & & d_n \end{bmatrix}$$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Primera fase

- $$Q_B = Q_1 \ldots Q_n \in \Re^{mxm}$$

- $$\Pi_B = \Pi_1 \ldots \Pi_{n-2} \in \Re^{nxn}$$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Segunda fase

- Una vez bidiagonalizada la matriz A se hacen 0 los elementos que no están en la diagonal principal con un algoritmo que obtenga

$$Q_S^T B_1 \Pi_S = \Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

- $Q_S \ y \ \Pi_S$ son matrices ortogonales de nxn

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Segunda fase

- La descomposición en valores singulares de A es

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma \\ 0 \end{bmatrix} V^T$$

Donde:

$$U = Q_B \, diag(Q_S, I_{m-n})$$

$$V = \Pi_B \Pi_S$$

Método de Golub - Kahan – Reinsch – Segunda fase

- Para obtener los valores singulares de la matriz bidiagonal B_1, se procede iterativamente

$$B_{K+1} = U_K^T B_K V_K$$

- Se buscan transformaciones U_k y V_k ortogonales que reduzcan los valores sobre la diagonal de B.

Otros métodos

- A partir de la primer propiedad presentada, (los valores singulares son iguales a las raíces cuadradas de los valores propios no nulos de A^TA)
- Se pueden usar otros métodos iterativos

Otros métodos (cont)

- En vez de calcular los valores singulares directamente, se podría calcular los valores propios de una nueva matriz que sea $B = A^T A$
- Tiene un costo extra (el cálculo de $A^T A$)
- Usando bibliotecas como BLAS o LAPACK, estas operaciones están optimizadas

Observaciones sobre estos métodos

- No son óptimos para matrices grandes o matrices dispersas.

- En estos métodos se aplican transformaciones ortogonales (de semejanza), como Householder o Givens (sobre una matriz dispersa).

  - Al emplear esas transformaciones, se incurre en fill-in de la matriz.

Observaciones sobre estos métodos

- Requieren mucha cantidad de memoria para su almacenamiento
- Computan todas las tripletas, cuando a veces sólo se desean unas pocas de las tripletas más grandes
  - O valores propios

Métodos SVD matrices dispersas

- SISVD (Subspace Iteration)
- TRSVD (Trace minimization)
- LASVD (Single-vector Lanczos)
- BLSVD (Block Lanczos)

Aplicaciones SVD

- Una herramienta común para resolver sistemas de ecuaciones mal condicionadas.
  - Conocidas como técnicas de **regularización**.

Aplicaciones – cálculo de inversa

- Se calcula en forma rápida la inversa de una matriz A (puede ser mal condicionada)

- $A^{-1} = V\ S^{-1}\ U^{T}$

- Recordar que U y V son ortogonales y S diagonal

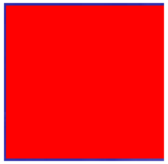
Aplicaciones – mínimos cuadrados

- Se quiere obtener x que minimice $||Ax = b||$

- Se calcula la svd de $A = UDV^T$
- $x=VD^{-1}U^Tb$
  - observar que si A es invertible $VD^{-1}U^T=A^{-1}$

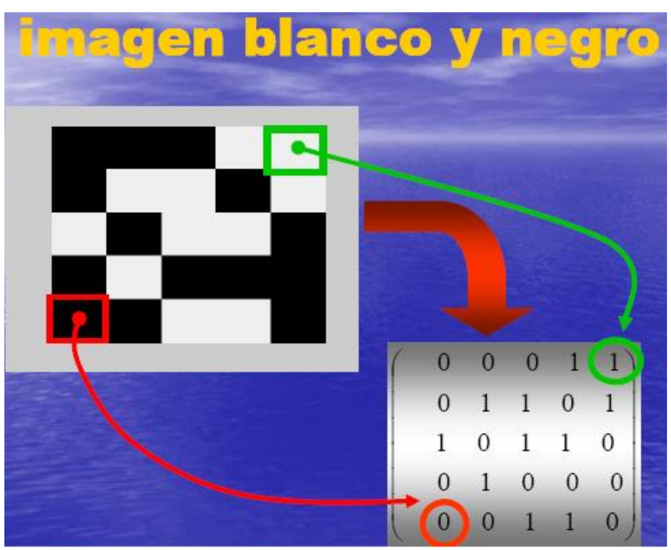
- Es útil cuando la matriz A es singular

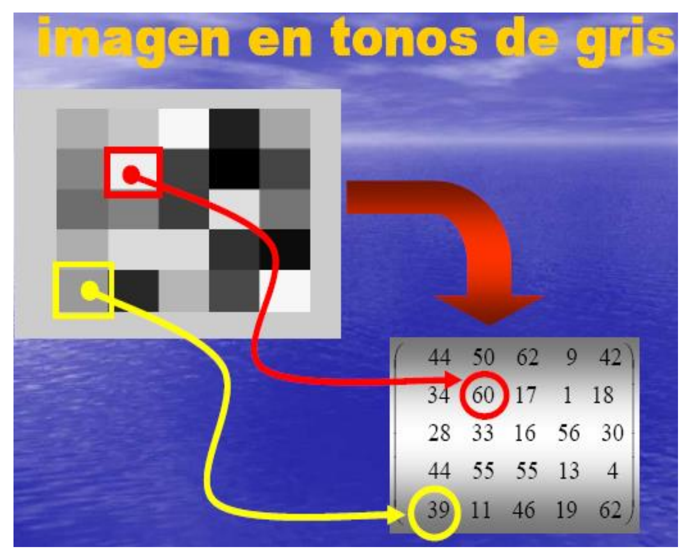
Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Una imagen a color es una matriz de (*n,m,3*) números:
  - a cada píxel se le asigna un vector en R^3, el vector representa la composición RGB del color
- Por ej. el vector (1,0,0) representa el color rojo.
- El píxel se verá 

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Una imagen en escala de grises es una matriz de *n* x *m*, a cada píxel se le asigna un valor entre 0 y k (donde k son los distintos niveles de gris):





Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Este enfoque permite aplicar SVD al tratamiento de imágenes bidimiensionales.
- Una imagen contiene información redundante, o sea, que puede ser eliminada sin que el efecto visual sea notable.
- Se podría sustituir A por otra matriz B de rango prefijado más pequeño

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Descomponer la matriz de imagen y luego comprimir la información utilizando solo algunos valores singulares dependiendo de la calidad que deseamos obtener.

- Para recuperar la matriz original después de aplicarle la SVD podemos utilizar la definición de suma de tripletas.

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- Para una imagen de 600x800 pixeles, el rango será 600.
- En vez de sumar todos los valores singulares, podemos reconstruirla hasta un número de valores singulares entre 1 y el rango de la matriz ($1 < k < r$).
- Mientras mayor sea k mejor será la calidad de imagen pero menor la compresión, y viceversa.
- Se desea encontrar un valor de k el cual nos permita comprimir la imagen sin perder mucha información visual

Aplicaciones – Compresión de imágenes

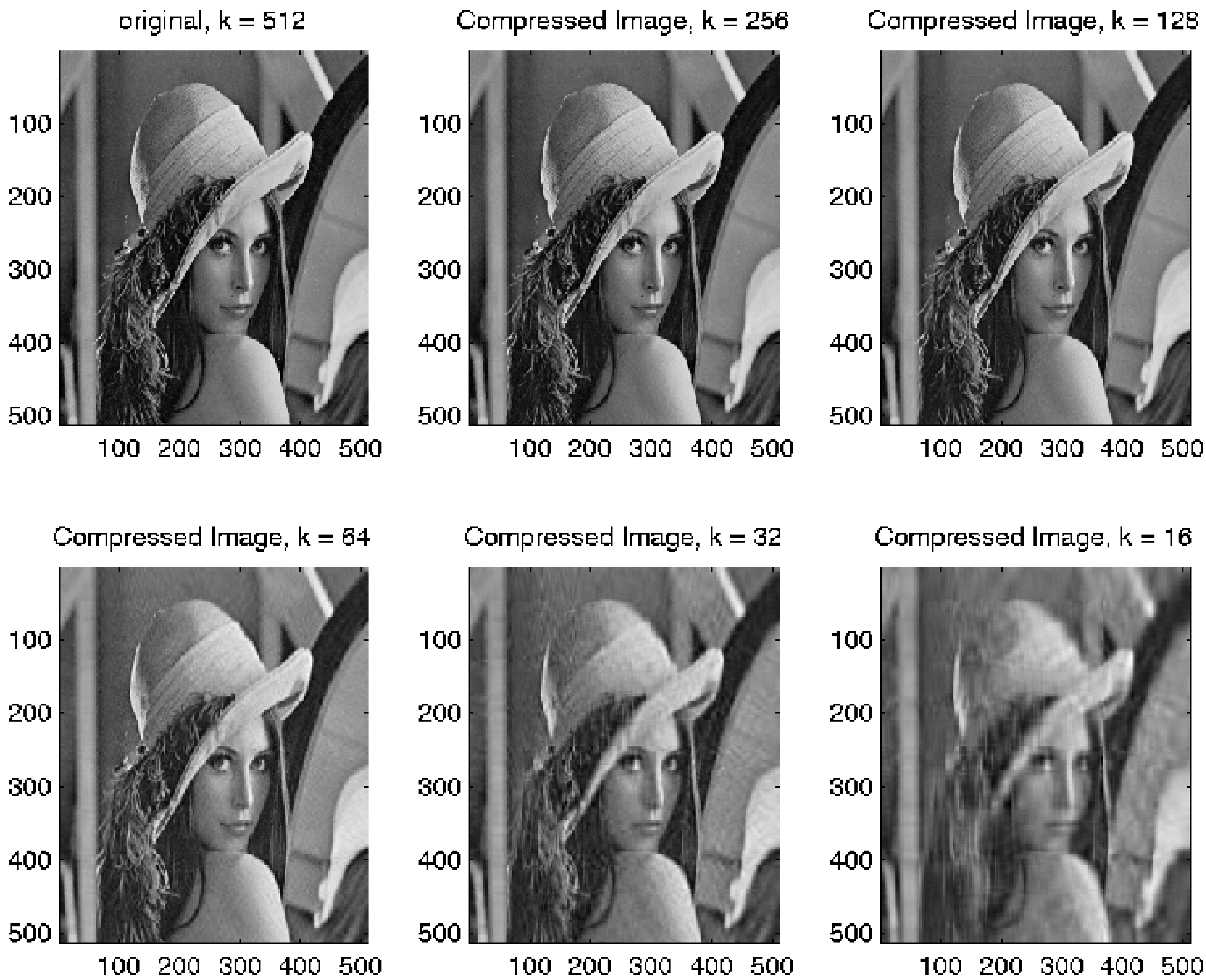
- Una imagen de 480 x 640 pixels requiere almacenar 307200 elementos
- Esto es, aproximadamente, 0.3 Mbytes.
- Para almacenar A_k se necesita n x k para U, k x m para V^T, k para S.
- En total, (n + m+ 1) x k

Aplicaciones – Compresión de imágenes

- La relación de compresión es

$$r = (n+m+1)k / nm$$

- Para la misma imagen n=480, m=640
- Tenemos con k = 50 que la imagen comprimida sólo requiere un 18% de la información original
- 50* (480+640+ 1) / (480*640)


original, k = 512
Compressed Image, k = 256
Compressed Image, k = 128
Compressed Image, k = 64
Compressed Image, k = 32
Compressed Image, k = 16
100
200
300
400
500