NOTAS PARA EL CURSO

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

2019-2020

Índice general

Capítulo 1

Números complejos

Definición 1. El conjunto de números complejos, que notaremos por $\mathbb{C}$, es el conjunto de pares ordenados de números reales (o sea $\mathbb{R}^2$) con las siguientes operaciones + y $\cdot$ definidas por :

- (a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).
- (a,b).(c,d)=(ac-bd,ad+bc).

A partir de esta definición observamos que $(a,0)+(c,0)=(a+c,0)$ y que $(a,0).(c,0)=(ac,0)$. Como $(a,b)=(a,0).(1,0)+(b,0).(0,1)$. Si notamos al complejo $(a,0)$ por a, $(b,0)$ por b y $(0,1)$ por i, tenemos que $z=(a,b)=a+bi$ donde $i^2=(-1,0)=-1$. De ahora en adelante notaremos por $z=a+bi$ con $a,b\in\mathbb{R}$ a un número complejo.

Propiedades

Propiedades de la suma: Para todo $z_1,\ z_2,\ z_3\in\mathbb{C}$ se cumple:

1. $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.
2. $z_1+z_2=z_2+z_1$.
3. Si $z_1=a+ib$ entonces $-z_1=-a-ib$ y $z+(-z)=0+i0=0$.
4. $z+0=z$.

Propiedades del producto: Para todo $z_1,\ z_2,\ z_3\in\mathbb{C}$ se cumple:

1. $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$.
2. $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$.
3. $z_1\cdot 1=z_1$.
4. Para todo $z\neq 0$ existe z^{-1} tal que $z\cdot z^{-1}=1$.
5. $z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$.

Obs: La propiedad 4 del producto nos permite definir la división por un número complejo distinto del cero. En efecto, si $z\neq 0$ entonces definimos:

$$\frac{w}{z}=w\cdot z^{-1}.$$

Ejercicio 1. *Dado $z=a+ib$, hallar z^{-1}.*

Parte Real e Imaginaria.

La parte real del complejo $z=a+ib$ es el número real a. **Notación: Re(z)**.
La parte imaginaria del complejo $z=a+ib$ es el número real b. **Notación: Im(z)**.

Ejercicio 2. *Calcule la parte real e imaginaria del complejo $\frac{a+ib}{c+id}$.*

Conjugación.

Dado un número complejo $z=a+ib$ definimos su conjugado como $\overline{z}=a-ib$.

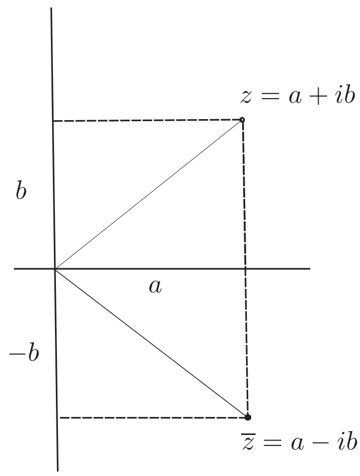
Propiedades: Para todo $z_1,\ z_2\in\mathbb{C}$ vale:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
3. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$.
4. $z \in \mathbb{R}$ si y solo si $\overline{z} = z$.
5. $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 3.

1. *Sea P un polinomio de coeficientes reales. Probar que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raiz de P entonces $\overline{\alpha}$ es también raiz de P.*
2. *Sea P un polinomio de coeficientes Complejos. ¿Es cierto que si $\alpha \in \mathbb{C}$ es raiz de P entonces $\overline{\alpha}$ es también raiz de P?*

Figura 1.



(a)

Módulo.

Dado un número complejo $z = a + ib$ su módulo es

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

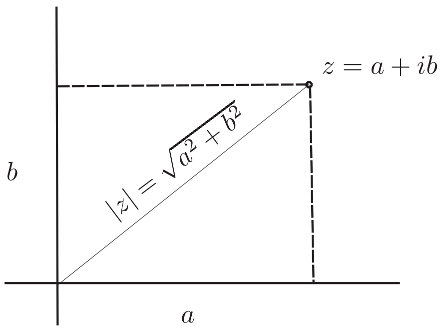
Propiedades: Para todo $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ vale:

1. $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ para todo $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.
4. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$ para todo $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$.
5. $z\overline{z} = |z|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
6. $|z| = |\overline{z}|$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Distancia entre números complejos.

La noción de módulo nos permite definir una distancia entre números complejos. Cuando tenemos la noción de distancia tienen sentido los conceptos de convergencia de sucesiones y de series, de límite de una función en un punto y de continuidad de funciones definidas en subconjuntos de $\mathbb{C}$.

FIGURA 2.



(a)

FIGURA 3. *Notar que $|z|=$ distancia del origen al complejo z .*

DEFINICIÓN 2. La distancia entre dos números complejos z_1 y z_2 es

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Como la distancia entre números complejos es la distancia euclídea de puntos de $\mathbb{R}^2$, no nos cansaremos reescribiendo las definiciones de convergencia de sucesiones, continuidad de funciones, etc, pues los conceptos coinciden con los de sucesiones o funciones de $\mathbb{R}^2$.

El **disco** o bola de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ se define como el conjunto

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$

El **disco cerrado** de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ se define como el conjunto

$$D[a, r] = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}.$$

La **cfa** de centro $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$ es

$$S(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r\}.$$

Convergencia de sucesiones.

DEFINICIÓN 3. Decimos que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $d(z_n, z) = |z_n - z| < \varepsilon$.

Observar que la definición anterior es equivalente a decir que $\{z_n\}$ converge a $z \in \mathbb{C}$ si $d(z_n, z) = |z_n - z| \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Propiedades:

1. Si $z_n \to z$ y $z_n^{'} \to z^{'}$ entonces $z_n + z_n^{'} \to z + z^{'}$ y $z_n.z_n^{'} \to z.z^{'}$.

2. Si $z_n = x_n + iy_n$ y $z = x + iy$, entonces $z_n \to z$ si y solo si $x_n \to x$ y $y_n \to y$.
3. Si $z_n \to z$ entonces $|z_n| \to |z|$.

Argumento de un número complejo.

DEFINICIÓN 4. Un número real módulo 2π es un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ que cumple las siuientes propiedades:

- Dados dos elementos α_1 y α_2 en A, se tiene que $\alpha_1 - \alpha_2$ es un múltiplo entero de 2π.
- En cada intervalo semiabierto de longitud 2π existe un elemento de A(del item anterior se deduce su unicidad). Los elementos de A son llamados **representantes de** A.

Ejemplo: Un ángulo es un número real módulo 2π, ya que, digamos

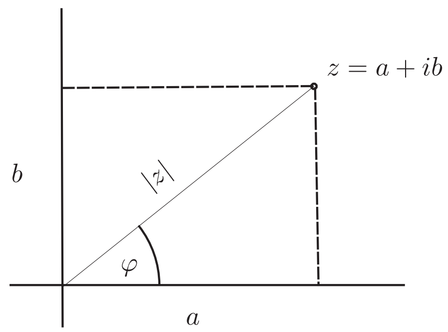
$$\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots$$

representan todos el mismo ángulo.

Dado $0 \neq z \in \mathbb{C}$, existe un número real módulo 2π tal que si φ es un representante, se cumple que

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

FIGURA 4.



(a)

FIGURA 5. *Notar que $|z|$= distancia del origen al complejo z .*

Hemos visto que, para un número complejo no nulo están bien definidos su módulo y su argumento. Reciprocamente, conociendo el módulo y el argumento, queda determinado un número complejo.
Como el argumento no es un número, vale la pena a la hora de resolver un problema, considerar un representante del argumento; para eso elejimos un intervalo semiabierto de longitud 2π. El único representante del argumento contenido en este intervalo se llama **argumento principal** y se denota por $Arg(z)$. Ver los ejercicios donde se enuncian algunas propiedades del argumento principal.

Raíz enésima.

Como vimos cualquier complejo $z \neq 0$ se puede escribir de la forma $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Usando las formulas trigonométricas

- $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + cos(\alpha)sen(\beta)$,
- $cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$,

no es dificil probar, por inducción completa, que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$. A partir de este último resultado tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$ existen exactamente n complejos $w_1, ..., w_n$ tales que $w_i^n = z$ para $i = 1, ..., n$.*

Proof: Sean $z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ y $w = |w|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$. Entonces $w^n = |w|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. Como $w^n = z$, entonces se tiene que cumplir que $|w|^n = |z|$ y que $\varphi + 2k\pi = n\theta$ con $k \in \mathbb{Z}$. Tomando $w_j = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos(\frac{\varphi+2j\pi}{n}) + i\sin(\frac{\varphi+2j\pi}{n})\right]$ para $j = 0, ...n-1$ se obtiene la tesis.

Ejemplo. Calcular $\sqrt[3]{2i}$. El complejo $2i$ se puede escribir como $2i = 2(cos(\pi/2) + isen(\pi/2))$.

Por la proposición anterior los complejos buscados son de la forma $w_j = \sqrt[3]{|z|}\left[\cos(\frac{\varphi+2j\pi}{3}) + i\sin(\frac{\varphi+2j\pi}{3})\right]$ para $j = 0, 1, 2$. Entonces

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right], \quad w_1 = \sqrt[3]{2}\left[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{6})\right],$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left[\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{8\pi}{6})\right].$$

Función Exponencial.

Dado $z = a + bi$, definimos $e^z = e^{a+bi} = e^a[cos(b) + isen(b)]$.

Propiedades:

1. Para todo $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ vale: $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
2. $e^{-z} = 1/e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$
3. Si $z = a + bi$ entonces $|e^z| = e^a$.
4. $|e^z| \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
5. $e^z = 1$ si y solo si $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.
6. $e^z = e^{z+2k\pi i}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

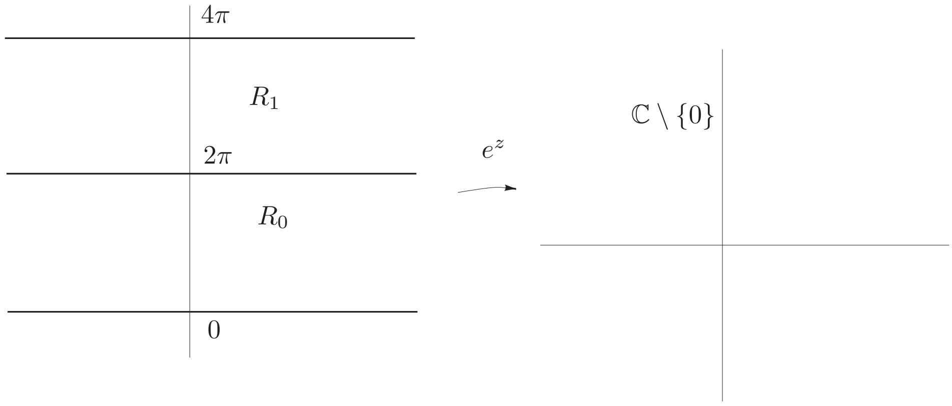
Sea $f(z) = e^z$, para cada $k \in \mathbb{Z}$ consideramos

$$R_k = \{z = x + yi : \ y \in [2k\pi, (2k+2)\pi) \text{ y } x \in \mathbb{R}\}.$$

Entonces f tiene las siguientes propiedades:

1. $f|_{R_k} : R_k \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es una función continua y biyectiva.
2. Si consideramos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existen infinitos z_k (uno por cada R_k) tales que $f(z_k) = z$. Además para cada z_k existe un entorno V_k de z_k, con $V_k \cap V_k^{'}$ si $k \neq k^{'}$, tal que $f : V_k \to f(V_k)$ es continua y biyectiva.

Logaritmo.



Dado $z \neq 0$ decimos que w es el logaritmo de z si $e^w = z$. Notación: a w lo llamaremos $log(z)$. En principio, el logaritmo es "la función inversa de la exponencial". Veamos hasta que punto podemos hacer este enunciado preciso.

Si $w = a + ib$, entonces como vimos,

$$e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

Si $e^w = z$, debemos tener $e^a = |z|$. Esto es posible a menos que $z = 0$, en cuyo caso no definiremos el logaritmo. Usando ahora que $e^a = |z|$, obtenemos

$$\cos b + i \sin b = \frac{z}{|z|}$$

de donde concluimos que cualquier representante del argumento de z sirve como b. Esto quiere decir que, para todo $z \neq 0$:

$$\log z = a + ib = \log |z| + iarg(z).$$

Esta fórmula muestra que no existe la inversa de la función exponencial, puesto que como $\log z$ sirven muchos números complejos. Por ejemplo $\log(z) = \log |z| + i(arg(z) + 2k\pi)$. Lo que se hace es elegir un argumento principal de manera que el logaritmo de cualquier complejo $z \neq 0$ sea un único número complejo.

Plano complejo ampliado.

Definición 5. El plano complejo ampliado es $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$; en este conjunto podemos extender algunas de las operaciones de suma y producto de números complejos:

- $z + \infty = \infty$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
- $z.\infty = \infty$, $\forall z \neq 0$.
- $\frac{z}{\infty} = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

No podemos definir: $\frac{0}{0}$; $\infty - \infty$; $0.\infty$ ni $\frac{\infty}{\infty}$.

Entorno de ∞. Para cada $R \in \mathbb{R}$ con $R > 0$, una base de entornos de ∞ es $B(0, R)^c = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$.

Con esta definición una base de entornos de un punto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ es la siguiente:

- Si $z \in \mathbb{C}$, una base de entornos son los discos de centro z y radio r.
- Si $z = \infty$, una base de entornos son los complementos de los discos cerrados de centro el origen y radio r.

Esto a su vez, permite definir lo que significa que una sucesión de números complejos converja a ∞. Una sucesión z_n converge a ∞ si para todo $R > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|z_n| > R$.

Capítulo 2

Transformaciones de Möebius

Sean a, b, c, d números complejos tales que $ad - bc \neq 0$. Definimos una transformación de Möebius como una función de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$ dada por

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & si \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \\ \frac{a}{c} & si \quad z = \infty \\ \infty & si \quad z = \frac{-d}{c}. \end{cases}$$

Se denotará por $\mathcal{M} = \{\varphi : \overline{C} \to \overline{C}$ tal que φ es de Moebius$\}$. En $\mathcal{M}$ vamos a considerar la operación composición $\varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x))$, con esta operación $(\mathcal{M}, \circ)$ tiene una estructura de grupo, esto es:
$i)$ $(\tau \circ \varphi) \circ \psi = \tau \circ (\varphi \circ \psi)$, $\forall \tau, \varphi, \psi \in \mathcal{M}$.
$ii)\varphi \circ Id = Id \circ \varphi = \varphi$, $\forall \varphi \in \mathcal{M}$.
$iii)$ $\forall \varphi \in \mathcal{M}$, $\exists \psi \in \mathcal{M}$ tal que $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id$. Notación $\psi = \varphi^{-1}$.

Usualmente a cada de transformación

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

se le asocia la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como t.A (t$\in \mathbb{C}$) representará la misma transformación que A, se toma $ad - bc = 1$ y así tenemos para cada transformación dos matrices asociadas A y -A.

Proposición 2. *Todo transformación de Möebius es biyectiva, y su inversa es también una transformación de Möebius.*

Demostración. Basta resolver la ecuación

$$\frac{az+b}{cz+d} = w$$

de donde se obtiene

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

que también es una transformación de Möebius. □

Algunos casos particulares de transformaciones de Möebius:

Traslaciones: $\tau_b : z \mapsto z + b$;
Rotaciones: $\rho_a : z \mapsto az$, $|a| = 1$,
Homotecias: $\varphi_r : z \mapsto rz$, $r \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.
Inversión: $I : z \mapsto \frac{1}{z}$

Proposición 3. *Toda transformación de Möbius es una composición de transformaciones de las mencionadas anteriormente.*

Demostración. Primero observar que

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

Entonces

$$z \overset{cz}{\mapsto} cz \overset{z+d}{\mapsto} cz+d \overset{\frac{1}{z}}{\mapsto} \frac{1}{cz+d} \overset{(b-\frac{ad}{c})z}{\mapsto} \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d} \overset{z+\frac{a}{c}}{\mapsto} \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}.$$

Definición 6. Diremos que z_0 es punto fijo de una función φ si $\varphi(z_0) = z_0$.

Proposición 4. *Toda transformación de Moebius distinta de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos.*

Demostración. Basta resolver la ecuación

$$\frac{az+b}{cz+d} = z$$

Corolario 1. *Una transformación de Moebius con tres puntos fijos es la identidad.*

Demostración. Basta aplicar la proposición anterior.

Ejercicio 4. *Si A, B y C , ($Re(A) \neq 0$) son tres números complejos constantes y z un complejo variable entonces*

$$(A + \overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0. \tag{1}$$

representa la ecuación de una circunferencia.

Demostración. Sean $A = a+ib$, $B = c+id$, $C = e+if$ y $z = x+iy$, entonces $z\overline{z} = x^2 + y^2$ y por lo tanto la ecuación (1) se transforma en

$$(2a)(x^2 + y^2) + 2cx + 2dy + 2e = 0. \tag{2}$$

que representa la ecuación de una cfa.
Recíprocamente, es fácil probar que una ecuación de la forma $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma = 0$ se puede escribir de la forma $(A + \overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0$.
Con los mismos argumentos se demuestra que la ecuación:

$$\overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0. \tag{3}$$

representa la ecuación de una recta y que toda recta se puede escribir de la forma (3). Por lo tanto la ecuación (1) representa la familia de todas las rectas y circunferencias del plano complejo (Para $Re(A) \neq 0$ una cfa y para $Re(A) = 0$ una recta).

Proposición 5. *Sea $\mathcal{F}$ la familia de todas las rectas y circunferencias del plano complejo. Entonces la imagen de un elemento de $\mathcal{F}$ por una transformación de Möbius es un elemento de $\mathcal{F}$.*

Demostración. Basta comprobar esto para las transformaciones dadas anteriormente con las cuales podemos construir cualquier transformación de Möbius mediante composición de ellas. Para rotaciones, traslaciones y homotecias este hecho es claro, por lo tanto solo lo vamos hacer para la inversión. Sea $w = 1/z$ y

$$(A+\overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0. \tag{4}$$

la ecuación general de un elemento de $\mathcal{F}$, entonces al aplicarle la inversión a (4) se transforma en

$$(A+\overline{A})\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \overline{B}\frac{1}{w} + B\frac{1}{\overline{w}} + C + \overline{C} = 0. \tag{5}$$

multiplicando por $w.\overline{w}$ la ecuación (5) se transforma en

$$(A+\overline{A}) + \overline{B}\overline{w} + Bw + (C+\overline{C})w\overline{w} = 0. \tag{6}$$

que es un elemento de $\mathcal{F}$.
Observar que si $Re(C) = 0$ y $Re(A) \neq 0$ entonces la circunferencia se transforma en un recta.

Ejercicio 5. *Dada una ecuación $(A+\overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0$ y una transformación de Moebuis $\varphi = (az+b)/(cz+d)$, dar una condición para saber cuando una circunferencia se transforma en una recta.*

Dados a, b, c tres número complejos diferentes existe una transfromación de Möbius que lleva la terna ordenada $\{a,\ b,\ c\}$ en $\{0,\ 1,\ \infty\}$ que es:

$$\varphi(z) = \frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}.$$

Es la única con esas condiciones, pues si

- $\varphi(a) = 0$ debemos tener $z-a$ en el numerador;
- $\varphi(c) = \infty$, $z-c$ ha de estar en el denominador;
- y si $\varphi(b) = 1$ llegamos a la fórmula enunciada arriba.

Ver los ejercicios para el caso en los cuales a, b o c pueden ser ∞.

Proposición 6. *Dadas dos ternas ordenadas $\{a,b,c\}$ y $\{a',b',c'\}$ existe una única transformación de Möbius que lleva*

$$a \mapsto a';\ b \mapsto b';\ c \mapsto c'.$$

Demostración. Ejercicio.

Corolario 2. *Dadas dos circunferencias $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C}'$ existe $g \in M$ tal que $g(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.*

Demostración. Basta tomar tres puntos en cada cfa y aplicar la proposición anterior.

EJEMPLO

Queremos construir una transformación que lleve la recta real en el disco unitario $S(0,1)$.

Como una recta y una circunferencia están determinadas conociendo tres puntos de cada una, y como las transformaciones de Möbius llevan rectas o circunferencias en rectas o circunferencias, basta tomar tres puntos en la recta, por ejemplo

$\{0, 1, \infty\}$ y tres en la circunferencia $S(0, 1)$, por ejemplo $\{1, i, -1\}$.
Asi buscamos

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tales que:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi(1) &= i \\ \varphi(\infty) &= -1 \end{aligned}$$

Como $\varphi(\infty) = a/c = -1$ tenemos $a \neq 0$ y podemos elegirlo como $a = 1$, luego $c = -1$.
De $\varphi(0) = 1$, sale que $b = d$ y de $\varphi(1) = i$ llegamos a que

$$\frac{b + 1}{d - 1} = i.$$

Como $b = d$ llegamos a $b = -i$. Por lo tanto:

$$\varphi(z) = \frac{z - i}{-z - i} = -\frac{z - i}{z + i}.$$

Observación 1. Como las transformaciones de Moebius son continuas un argumento de conexidad muestra que si $g \in M$ transforma una cfa en una recta,la parte de adentro de la cfa se va a transformar en uno de los semiplanos que determina la recta. Lo mismo va a suceder con la parte de afuera de la cfa con el otro semiplano.
El mismo argumento es valido si g transforma una recta en otra recta o una cfa en otra cfa.

Definición 7. Dos puntos son inversos con respecto a un círculo dado si:
i) Los puntos están en un misma semirrecta que pasa por el centro de la circunferencia.
ii) El producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio del círculo.

Ejercicio 6. 1. *Probar que z_1 y z_2 son puntos inversos con respecto al círculo $|z - a| = R$ si, y solo si,*

$$(z_1 - a)\overline{(z_2 - a)} = R^2$$

Observar que cuando $z_1 \to a$ entonces $z_2 \to \infty$.

2. *Como ya vimos la ecuación general del círculo se puede escribir en la forma*

$$(A + \overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0. \tag{7}$$

Si z_1 y z_2 están relacionadas por la ecuación:

$$(A + \overline{A})z_1\overline{z_2} + \overline{B}z_1 + B\overline{z_2} + C + \overline{C} = 0$$

Probar que para $A \neq 0$, z_1 y z_2 son puntos inversos del círculo (7). Si $A = 0$, la expresión $\overline{B}z_1 + B\overline{z_2} + C + \overline{C} = 0$, determina que $dist(z_1, r) = dist(z_2, r)$, siendo $r = \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0$.

3. *Dado cualquier círculo (recta) y un par de puntos z_1 y z_2 que son puntos inversos, probar que la transformación bilineal $\varphi = (az+b)/(cz+d)$ transforma los puntos inversos z_1 y z_2 en puntos inversos del círculo (recta) imagen.*

El ejercicio anterior nos proporcionan un método rápido y elegante para construir transformaciones de Moebius particulares.
Para construir las transformaciones de Meobuis que llevan el semiplano superior en el disco unidad, seguimos el siguiente razonamiento:
Sea $\varphi = (az + b)/(cz + d)$, esta transformación debe llevar la recta real en la circunferencia de radio 1. Por lo tanto debe llevar puntos inversos en puntos inversos. Debe existir α en el semiplano superior tal que $\varphi(\alpha) = 0$. Como $\overline{\alpha}$ es el punto inverso de α en la recta real entonces $\varphi(\overline{\alpha})$ se transforma en el punto inverso de $\varphi(\alpha)$ respecto de la circunferencia de radio 1, como $\varphi(\alpha) = 0$ entonces $\varphi(\overline{\alpha}) = \infty$, por lo tanto

$$\varphi(z) = \frac{a}{c}\left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$$

Además $\forall z = x \in R$ se tiene que cumplir que $|\varphi(x)|$=1, por lo tanto

$$|\varphi(x)| = \left|\frac{a}{c}\right|\left|\frac{x-\alpha}{x-\overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right|\left|\frac{x-\alpha}{\overline{x-\alpha}}\right| = \left|\frac{a}{c}\right| = 1$$

entonces $a/c = e^{i\beta}$ para algún β y entonces

$$\varphi(z) = e^{i\beta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \quad \text{con} \quad Im(\alpha) > 0 \tag{8}$$

Ejercicio 7. *Mostrar que las transformaciones de Moebius que transforman el círculo unidad en el círculo unidad son de la forma*

$$f(z) = e^{i\beta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1} \quad \textit{con} \quad |\alpha| < 1 \tag{9}$$

1. Ejercicios resueltos

Ejercicio 1.

Sea $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una transformacin de M$\ddot{o}$ebius tal que $\phi(2) = 2$, $\phi(1-i) = 2+i$ y $\phi(1+i) = \infty$.

1. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ una circunferencia. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\phi(\mathcal{C})$ sea una recta.
2. Sea $\mathcal{C} := (\partial B(1,1))=$ borde de la bola de centro 1 y radio 1. Halle $\phi(\mathcal{C})$.
3. Hallar $\phi(\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 3/2| = 1/2\})$.
4. Existe $z \in B(1,1)$ tal que $|\phi(z)| = 1$? Justifique.

Si consideramos $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, imponiendo que $\phi(2) = 2$, $\phi(1-i) = 2+i$ y $\phi(1+i) = \infty$ y haciendo cuentas llegamos a que

$$\phi(z) = \frac{(1+i)z - 4i}{z - (1+i)}.$$

1. Como $\phi(1+i) = \infty$, se tiene que si $\mathcal{C}$ es una circunferencia con $1+i \in \mathcal{C}$ se cumple que $\phi(\mathcal{C})$ es una recta. Y si $1{+}i \notin \mathcal{C}$ se cumple que $\phi(\mathcal{C})$ es una circunferencia.

2. Como los puntos $2, 1+i, 1-i \in \mathcal{C}$ se tiene que $\phi(2), \phi(1+i), \phi(1-i) \in \phi(\mathcal{C})$. Como los puntos $\phi(2), \phi(1+i), \phi(1-i)$ pertenecen a la recta $x = 2$, entonces $\phi(\mathcal{C})$ es la recta $x = 2$.

3. Sea $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - 3/2| = 1/2\}$. Como $1 + i \notin \mathcal{C}_1$ se cumple que $\phi(\mathcal{C}_1)$ es una circunferencia. Como $\mathcal{C}_1$ es tangente a $\mathcal{C}$ se tiene que $\phi(\mathcal{C}_1)$ es tangente a $\phi(\mathcal{C})$. Y como $2 \in \mathcal{C}_1$ se cumple que $\phi(2) = 2 \in \phi(\mathcal{C}_1)$. Por lo tanto $\phi(\mathcal{C}_1)$ tiene que ser una circunferencia de centro $a \in \mathbb{R}$, con $a > 2$ y que pasa por el punto 2. Por lo tanto $\phi(\mathcal{C}_1) = \{z \in \mathbb{C} : \ \ |z - a| = (a-2)\}$. Como $1 \in \mathcal{C}_1$ se cumple que $\phi(1) = i + 3 \in \phi(\mathcal{C}_1)$. Haciendo cuentas se llega a que $a = 3$.

4. No es posible ya que $\phi(\{z \in \mathbb{C} : \ \ |z - 1| \leq 1\}) = \{z \in \mathbb{C} : \ Re(z) \geq 2\}$.

Ejercicio 2.

1. Sean $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Probar que $T(z) = e^{i\beta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$ lleva el eje real en la cfa unidad.
2. Considere las rectas $r_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) = 0\}$ y $r_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ Im(z) = 1\}$.
   a) Hallar una transformación de Moebius que lleve en la circunferencia unidad y r_2 en r_2.
   b) Dadas dos rectas cualesquiera paralelas r_3 y r_4 con $r_3 \neq r_4$. Existe una transformación de Moebius que lleve r_3 en la circunferencia unidad y r_4 en la recta r_2? Justificar.

c) Dadas dos rectas cualesquiera (Pueden ser paralelas o no) r_5 y r_6 con $r_5 \neq r_6$. Existe una transformación de Moebius que lleve r_5 en la circunferencia unidad y r_6 en la recta r_2? Justificar.

Parte 1.
Sea $z \in \mathbb{R}$ entonces $\overline{z} = z$. Por lo tanto

$$|T(z)| = \left| e^{i\beta} \left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \right) \right| = \left| e^{i\beta} \right| \left| \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \right| \overset{|e^{i\beta}|=1}{=} \left| \frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \right| \overset{\overline{z}=z}{=} \left| \frac{z-\alpha}{\overline{z}-\overline{\alpha}} \right| = \left| \frac{z-\alpha}{\overline{\overline{z-\alpha}}} \right| = 1.$$

Parte 2. a) Vamos a usar la parte 1 y vamos a considerar $T(z) = e^{i\beta}\left(\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}\right)$, con esto automáticamente se tiene que $T(r_1)$ es la circunferencia unidad. Ahora como r_1 y r_2 se cortan en ∞ y la cfa unidad y r_2 se cortan en i, entonces se tiene que cumplir que $T(\infty) = i$. Por lo tanto, como $T(\infty) = e^{i\beta}$, tomamos $e^{i\beta} = i$. Ahora basta con fijar un punto de r_2. Tomemos, por ejemplo, $T(1+i) = 1+i$. Esto es cierto debido a que con las condiciones ya impuestas, la imagen de r_1 es una circunferencia o una recta que es tangente a la circunferencia unidad en i. Entonces hay que resolver la ecuación

$$T(1+i) = \frac{1+i-\alpha}{1+i-\overline{\alpha}} = 1+i.$$

La cual tiene como solución $\alpha = -1-i$. Alternativamente uno podía considerar que algún punto de r_2, $z = i + x$, tiene de imagen a ∞. Por ejemplo con $x = 0$ se obtiene:

$$T(z) = i\frac{z+i}{z-i}$$

Parte 2.b) Basta considerar una transformación de Moebius T_1 con $T_1(r_3) = r_1$ y $T_1(r_4) = r_2$ y luego considerar $T \circ T_1$. Para justificar que T_1 existe y es de Mobius basta recordar que las traslaciones, las homotecias y las rotaciones son transformaciones de Moebius, adems es claro que mediante estas transformaciones se puede llevar dos rectas paralelas cualesquiera en r_1 y r_2.

Parte 2.c) En general no existen, si justo r_5 y r_6 no son paralelas entonces se cortaran con un cierto ángulo distinto de 0 en un punto z. Por absurdo, si existiera dicha T, entonces $T(z) = i$, pero el ángulo que forman la recta r_2 y la circunferencia unidad en i es 0, mientras que antes no lo era. Esto es absurdo pues las transformaciones de Moebius preservan ángulos.

Alternativamente se podía usar que $T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de Moebius es biyectiva, pero dos rectas no paralelas se cortan en dos puntos (z y ∞) mientras que la circunferencia unidad y la recta r_2 solo se cortan en uno solo, absurdo.

Capítulo 3

Funciones Holomorfas

1. Conceptos básicos

Definición 8. Dado Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Decimos que f es **holomorfa (o analítica o derivable)** en $a \in \Omega$ si existe y es un número complejo el límite:

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Llamaremos derivada de f en a y lo **denotaremos por** $f'(a)$. Notaremos por $H(\Omega)$ al conjunto de las funciones f tal que f es holomorfa en todos los puntos de Ω. En este caso decimos que f es holomorfa en Ω.

Propiedades.

1. Si f es holomorfa en a, entonces es continua en a.
2. Si $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ son holomorfas en a, entonces
   a) $f + g$ es holomorfa en a y $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
   b) fg es holomorfa en a y $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
   c) Si $g(a) \neq 0$ entonces f/g es holomorfa en a y $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{g(a)^2}$.
3. Si $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $a \in \Omega_1$ y $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ es holomorfa en $b = f(a) \in \Omega_2$, entonces $g \circ f$ es holomorfa en a y vale la regla de la cadena:
$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

La demostración queda como ejercicio, se hace igual que para funciones reales de variable real.
Hemos visto que el concepto de continuidad de una función de variable compleja no difiere del conocido para funciones de dos variables reales.
Sin embargo, ahora veremos que el concepto de derivabilidad de una función holomorfa es más fuerte que el de diferenciabilidad para una transformación de $\mathbb{R}^2$.
Comenzamos con algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Consideremos $f(z) = \overline{z}$, la conjugación, o sea

$$f(x + iy) = x - iy.$$

Veamos si es holomorfa en $z = 0$, para ello debemos ver si existe el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x + iy) - f(0)}{x + iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x + iy) - f(0)}{x + iy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{-2xy}{x^2 + y^2}.$$

Este último límite sabemos que no existe. Luego, f no es holomorfa en 0(ni en cualquier punto $z \in \mathbb{C}$), mientras que si escribimos

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

las funciones u y v son infinitamente diferenciables como funciones de $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 2. Los polinomios Obviamente la función $f(z) = z$ es holomorfa y su derivada es $f'(z) = 1$ para todo z. Luego, usando que la suma y el producto de funciones holomorfas es holomorfa, tenemos que todos los polinomios son funciones holomorfas en $\mathbb{C}$.

2. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Sean $z = x + iy$, u, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

veamos que relación existe entre la diferenciabilidad de u y v y la analiticidad de f en un punto dado.
Supongamos que f es holomorfa en a, y para simplificar la notación tomemos $a = 0$ y $f(0) = 0$. Como f es holomorfa en 0, debe existir

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$$

eso implica que los límites

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x + i0)}{x + i0} \tag{10}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0 + iy)}{0 + iy} \tag{11}$$

deben existir y ser iguales.

La ecuación (10) es equivalente a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{u(x, 0) + iv(x, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{u(x, 0)}{x} + i \lim_{x\to 0} \frac{v(x, 0)}{x} = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0).$$

donde u_x denota la derivada de u respecto a x. Por otro lado, la ecuación (11) implica que

$$\lim_{y\to 0} \frac{u(0, y) + iv(0, y)}{iy} = -i \lim_{y\to 0} \frac{u(0, y)}{y} + \lim_{y\to 0} \frac{v(0, y)}{y} = -iu_y(0, 0) + v_y(0, 0).$$

Como los límites (10) y (11) deben ser iguales, tenemos:

$$u_x(0, 0) = v_y(0, 0); \quad u_y(0, 0) = -v_x(0, 0).$$

Conclusión: Para que f sea holomorfa en $a = x_0 + iy_0$ es necesario que u y v sean diferenciables en a y que se cumplan las ecuaciones de **Cauchy-Riemann**

- $u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0)$
- $u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$.

En el ejemplo de la función $f(z) = \overline{z}$ vemos inmediatamente que esto no se cumple.

Veamos que también se cumple el recíproco, o sea las ecuaciones de Cauchy-Riemann son una condición necesaria y suficiente.

TEOREMA 3. *Sean u y v diferenciables en $a \in \Omega$ y que valen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces f es holomorfa en a y $f'(a) = u_x(a) - iu_y(a) = u_x(a) + iv_x(a)$.*

Demostración. Nuevamente, para simplificar tomamos $a = 0$ y $f(0) = 0$; entonces f es holomorfa sii existe el límite cuando $z \to 0$ de

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{u(x,y) + iv(x,y)}{x+iy} = \frac{xu(x,y) + yv(x,y) + i[xv(x,y) - yu(x,y)]}{x^2+y^2} \tag{12}$$

Como u y v son diferenciables en $(0,0)$ podemos escribir:

$$u(x,y) = u_x(0,0)x + u_y(0,0)y + r_1(x,y)$$
$$v(x,y) = v_x(0,0)x + v_y(0,0)y + r_2(x,y) \quad \text{donde } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r_i(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,\ i = 1,2.$$

Sustituyendo en la ecuación (12), obtenemos que $f(z)/z$ es igual a:

$$\frac{1}{x^2+y^2}\left[x^2u_x + xyu_y + yxv_x + y^2v_y + xr_1 + yr_2 + i\left(-yxu_x - y^2u_y + x^2v_x + xyv_y - yr_1 + xr_2\right)\right]$$

usando que se verifica Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x^2+y^2)u_x - i(x^2+y^2)u_y + (x-iy)r_1 + (ix+y)r_2\right] \\ &= u_x - iu_y + \tfrac{1}{x^2+y^2}\left[(x-iy)r_1 + (ix+y)r_2\right]. \end{aligned}$$

Tomando límites en $(0,0)$ se obtiene:

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = u_x(0,0) - iu_y(0,0) + \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{(x-iy)r_1}{x^2+y^2} + \frac{(ix+y)r_2}{x^2+y^2}\right].$$

Como

$$\left|\frac{(x-iy)r_1}{x^2+y^2}\right| = \frac{|r_1(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

y de una expresión análoga para el otro sumando, el límite es cero. □

Ejemplo 3. Probar que $log(z)' = 1/z$.

Sea $z = x+iy$, como $log(z) = log|z| + iArg(z)$ entonces $log(z) = log(\sqrt{x^2+y^2}) + iArctg(y/x)$. Entonces $u(x,y) = log(\sqrt{x^2+y^2})$ y $v(x,y) = Arctg(y/x)$. Claramente u y v cumplen las hipótesis de la proposición 3, por lo tanto f es es holomorfa. Como $f'(z) = u_x(z) - iu_y(z)$, un simple cálculo muestra que $log(z)' = 1/z$.

Ejercicio 8. *Probar que* $(e^z)' = e^z$.

3. Series de potencias

Convergencia puntual y uniforme.

Definición 9. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $\{f_n\}$ con $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones.

- Decimos $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si dado $z_0 \in \Omega$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de z_0 y ε) tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|f_n(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon$.
- Decimos $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende ε) tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in \Omega$.
- Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge puntualmente si la sucesión $\{F_n\}$ donde $F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$ converge puntualmente.
- Y decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente si la sucesión $\{F_n\}$ ($F_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$) converge uniformemente.

Recordamos el siguiente lema que será de mucha utilidad. Omitimos su demostración ya que seguramente fue hecha en el curso de ecuaciones diferenciales.

Lema 1. **Lema de Weiestrass**. Sea $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones tal que existe una sucesión de números reales $\{M_n\}$ que cumple que

$$|f_n(z)| \leq M_n \ \forall z \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si la serie real $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en Ω.

Definición 10. Una serie de potencias es una serie de funciones definidas en $\Omega \subset \mathbb{C}$, del tipo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (z-\alpha)^k$$

donde $\{a_k\}$ es una sucesión de números complejos y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ converge puntualmente si la sucesión $\{f_n\}$ ($f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k(z-\alpha)^k$) converge puntualmente. Y decimos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ converge uniformemente si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente.

Lema 2. **Lema de Abel**. Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge para $z_0 \neq 0$, entonces converge absolutamente para todo z con $|z| < |z_0|$.

Demostración. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ converge entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n z_0^n = 0$. Por lo tanto existe $M > 0$ tal que

$$|a_n z_0^n| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, tenemos que si $|z| < |z_0|$ se cumple que

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| . \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

Como $|\frac{z}{z_0}| < 1$ se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{z}{z_0}|^n$ converge y por comparación se tiene que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ es convergente.

Corolario 4. *Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ no converge para $z_0 \neq 0$, entonces no converge para todo z con $|z| > |z_0|$.*

Teorema 5. **Radio de convergencia**. *Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ existe $R \in [0, +\infty]$ tal que se verifica lo siguiente:*

1. *Si $|z-\alpha| < R$ la serie de potencias converge absolutamente.*
2. *Si $0 < r < R$ entonces la serie de potencias converge uniformemente en $D[\alpha, r] = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-\alpha| \leq r\}$.*
3. *Si $|z-\alpha| > R$ la serie de potencias no converge.*

Demostración. Haciendo el cambio de variable $w = z-\alpha$ la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ se transforma en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$. Vamos hacer la demostración para esta última serie. Sea el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tal que

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq 0 : \ \text{la serie } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ es convergente } \}.$$

$A \neq \emptyset$ ya que $0 \in A$. Por lo tanto tenemos dos posibilidad para A:
Caso a). A es un conjunto acotado superiormente. En este caso existe $R = sup(A)$. Si $R = 0$ se cumple trivialmente el teorema. Supongamos que $R > 0$.
Vamos a demostrar el item 1. del teorema. Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_1| < R$. Entonces, por definición de supremo, existe $z_2 \in A$ con $|z_1| < |z_2| \leq R$. Como $z_2 \in A$ se cumple que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ converge. Luego por el Lema de Abel, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ converge absolutamente.
Vamos a probar el item 2. del teorema. Sea r con $0 < r < R$ y $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \leq r$. Por el item 1) se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ converge. Como $|z| \leq r$ se tiene que $|a_n z^n| \leq |a_n r^n|$. Luego, tomando $M_n = |a_n r^n|$, por el Lema de Weierstrass (lema 1) se tiene que la serie es uniformemente convergente en $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq r\}$.
Por último, sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > R$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge, por el lema de Abel converge para todo $z_1 \in \mathbb{C}$ con $|z_1| < |z|$. Si tomamos z_1 con $R < |z_1| < |z|$ contradecimos que R es el supremo de A.
Caso b). A es un conjunto no acotado superiormente. En este caso $R = +\infty$ y el teorema se cumple trivialmente.

Como calcular el radio de convergencia.

PROPOSICIÓN 7.
1. *Si existe* $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *entonces* $R = \frac{1}{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$.
2. *Si existe* $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ *entonces* $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar el item 1. La demostración del item 2. es análoga.

Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - \alpha| < R$. Entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(z-\alpha)^{n+1}|}{|a_n(z-\alpha)^n|} = |z-\alpha|. \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z-\alpha|}{R} < 1.$$

Luego por el criterio de D'Alambert la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ converge.
Si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z - \alpha| > R$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}(z-\alpha)^{n+1}|}{|a_n(z-\alpha)^n|} = |z-\alpha|. \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z-\alpha|}{R} > 1.$$

Luego por el criterio de D'Alambert la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ no converge.
De lo anterior deducimos que $R = \frac{1}{\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$.

Consideremos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4. Calcular el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.

En este ejemplo se tiene que $a_n = \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Alpicando la proposición anterior se tiene que $R = 1$. Por lo tanto si $|z| < 1$ la serie de potencias converge y si $|z| > 1$ la serie de potencias NO converge. Para $z = 1$ la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la cual es divergente. Para $z = -1$ la serie queda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ la cual es convergente. Por lo que este ejemplo muestra que para los $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = R$, a priori, no se puede afirmar si hay o no convergencia.
Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ el radio de convergencia es $R = 1$ y para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ se cumple que la serie es divergente. Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ el radio de

convergencia es $R = 1$ y para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ se cumple que la serie es convergente.

4. Representación por series de potencias

DEFINICIÓN 11. El número R se llama **radio de convergencia** y se puede calcular por la fórmula:

$$R = \left[\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \right]^{-1}.$$

DEFINICIÓN 12. Sean Ω abierto en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Decimos que f es **representable por series de potencias** en Ω si para cada $\alpha \in \Omega$ existe $r > 0$ y una sucesión de complejos $\{a_n\}$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n, \text{ para todo } |z-\alpha| < r.$$

Observación: Uno de los resultados más importantes de este curso es que una función f es representable por series de potencia en Ω si y sólo si $f \in H(\Omega)$.

Por ahora probaremos una de las dos implicaciones, la otra se verá más adelante.

TEOREMA 6. *Si f es representable por series de potencias en Ω, entonces $f \in H(\Omega)$; más aún, si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, para $|z-\alpha| < r$ entonces*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-\alpha)^{n-1},$$

en otras palabras se pueden intercambiar el límite y la derivación.

DEMOSTRACIÓN. Obvserve que si la serie $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$, converge en $|z-\alpha| < r$, entonces también converge la serie $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-\alpha)^{n-1}$, pues ambas tienen el mismo radio de convergencia.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\alpha = 0$. Sean $w \in D(\alpha, r)$ y P tal que $|w| < P < r$. Para $z \neq w$ se tiene

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\frac{z^n - w^n}{z-w} - n w^{n-1} \right] = (z-w) \sum_{k=1}^{\infty} a_n \phi_n(w)$$

donde

$$\phi_n(w) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ \frac{n w^{n-1}(w-z) - (w^n - z^n)}{(w-z)^2} & \text{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Observe que $\phi_n(w)$ es la derivada con respecto a w de $\frac{w^n - z^n}{w-z}$; luego como

$$\frac{w^n - z^n}{w-z} = \frac{z^n \left(\frac{w}{z}\right)^n - 1}{z\left(\frac{w}{z} - 1\right)} = z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{w}{z}\right)^k,$$

se tiene que

$$\phi_n(w) = \left[z^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{w}{z}\right)^k \right]' = z^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k \left(\frac{w}{z}\right)^{k-1} \frac{1}{z} = \sum_{k=1}^{n-1} k w^{k-1} z^{n-k-1}.$$

Si z está próxima de w entonces $|z|$ también es menor que P. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |\phi_n(w)| &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} k|w|^{k-1}|z|^{n-k-1} \\ &\leq \textstyle\sum_{k=1}^{n-1} kP^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}P^{n-2}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n w^{n-1}\right| = |z-w|\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(w)\right| \leq |z-w|\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|P^{n-2}.$$

Note que $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n z^n$ tiene el mismos radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|P^{n-2}$ converge ya que P es menor que r. Después, tomando el límite cuando $z \to w$ obtenemos el resultado buscado. □

COROLARIO 7. *Se cumple que f' también es representable en series de potencias, y por lo tanto f' también es holomorfa. Vale la fórmula*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)a_n(z-\alpha)^{n-k}$$

donde $f^{(k)}(\alpha) = k!a_k$.

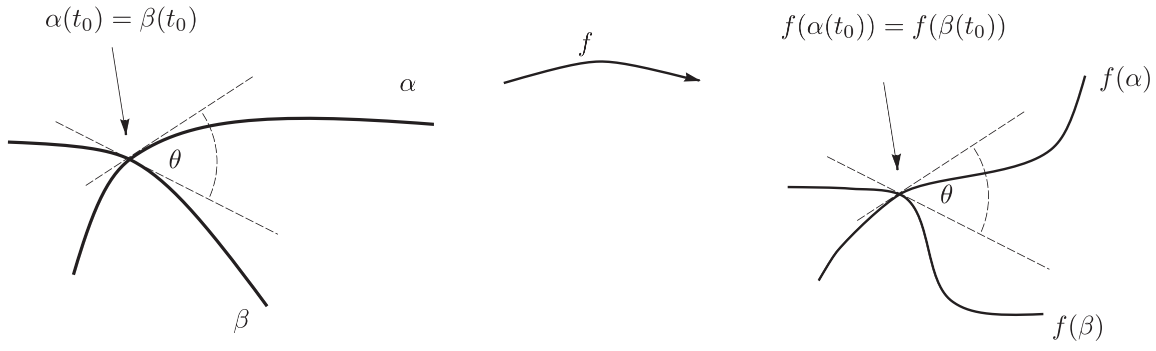
COROLARIO 8. *Si f es representable por series de potencias en Ω y $f(z) = \sum a_n(z-\alpha)^n$ en un disco $D(a;r)$ entonces los coeficientes a_n son los coeficientes de Taylor:*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}.$$

EJEMPLO 5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z$. Como $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, entonces $(e^z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$. Entonces $(e^z)' = e^z$.

4.1. Ángulo entre curvas. Una curva es una función $\alpha : (a,b) \to \mathbb{C}$ con α' continua. Dadas dos curvas $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{C}$, con $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$ para algún $t_0 \in (a,b)$, llamamos ángulo entre las curvas en el punto $\alpha(t_0)$ al número $\theta \in [0,\pi]$ tal que

$$cos(\theta) = \frac{< \alpha'(t_0), \beta'(t_0) >}{|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|}.$$



Proposición 8. *Sea $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ con $f^{'}(z_0) \neq 0$ y $\alpha, \beta : (a,b) \to \mathbb{C}$ dos curvas con $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = z_0$ para algún $t_0 \in (a,b)$. Entonces el ángulo entre α y β es igual al ángulo entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$.*

Demostración. Primero observemos que $(f(\alpha(t_0)))^{'} = f^{'}(\alpha(t_0)).\alpha^{'}(t_0) = f^{'}(z_0).\alpha^{'}(t_0)$. El coseno del ángulo entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ es

$$\frac{< (f(\alpha(t_0)))^{'}, (f(\beta(t_0)))^{'} >}{|(f(\alpha(t_0)))'||(f(\beta(t_0)))'|} = \frac{< f^{'}(z_0).\alpha^{'}(t_0), f^{'}(z_0).\beta^{'}(t_0) >}{|f'(z_0).\alpha'(t_0)||f'(z_0).\beta'(t_0)|} =$$

$$\frac{|f^{'}(z_0)|^2 < \alpha^{'}(t_0), \beta^{'}(t_0) >}{|f'(z_0)|^2|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|} = \frac{< \alpha^{'}(t_0), \beta^{'}(t_0) >}{|\alpha'(t_0)||\beta'(t_0)|}.$$

□

Más adelante mostraremos que si $f^{'}(z_0) = 0$, es posible encontrar dos curvas α y β con $\alpha(t_0) = \beta(t_0) = z_0$ de modo que el ángulo entre α y β sea distinto del ángulo entre $f(\alpha)$ y $f(\beta)$.

5. Integración

Definición 13 (Camino). Un **camino** es una curva continuamente diferenciable a trozos. Esto es, si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es un camino, entonces existen puntos s_j, con $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = b$ tales que $\gamma^{'}$ es continua en (s_j, s_{j+1}) es existen $\lim_{t \to s_j^+} \gamma^{'}(t)$ y $\lim_{t \to s_{j+1}^-} \gamma^{'}(t)$.

Obs: Como sucede para curvas, un camino es una función; sin embargo, por abuso de lenguaje a veces se dice que el camino es su recorrido. Esto es, se llama camino al conjunto $\gamma([a,b])$.

Definición 14. Dada $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino. Decimos que otro camino $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ es equivalente con γ si su imagen coincide con la de γ (esto es $\gamma([a,b]) = \gamma_1([a_1,b_1])$ y existe una función continuamente diferenciable $\varphi : [a_1,b_1] \to [a,b]$ tal que $\varphi' \neq 0$, $\varphi(a_1) = a, \varphi(b_1) = b$ y $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.

Definición 15. Sea f una función definida en $\gamma([a,b])$ y con valores complejos. Supongamos que f es continua. Se define la **integral de f sobre el camino** γ a:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b Re[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt + i\int_a^b Im[f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt.$$

- Observe que la función $t \mapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ es una función definida en $[a,b]$ con un número finito de puntos de discontinuidad. Eso implica que la integral existe.
- Con respecto al abuso de lenguaje mencionado anteriormente. Vea que si $\gamma_1 : [a_1,b_1] \to \mathbb{C}$ es otro camino tal que su imagen coincide con la de γ;

  $$\gamma([a,b]) = \gamma_1([a_1,b_1]),$$

  y existe una función continuamente diferenciable $\varphi : [a_1,b_1] \to [a,b]$ tal que

  $$\begin{cases} \varphi' \neq 0; \\ \varphi(a_1) = a, \ \varphi(b_1) = b \end{cases}$$

entonces las integrales coinciden:

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \\ &= \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi(t)'dt \text{ (haciendo el cambio } s=\varphi(t)) \\ &= \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz.\end{aligned}$$

Esto último prueba que si γ y γ_1 son caminos equivalentes entonces $\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

Propiedades.

1. $\int_\gamma(\alpha f(z)+\beta g(z))dz = \alpha\int_\gamma f(z)dz + \beta\int_\gamma g(z)dz$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$.
2. Si γ_1 y γ_2 son curvas tales que $\gamma_1(b_1)=\gamma_2(a_2)$ y notamos por $\gamma_2.\gamma_1$ la concatenación de ambas curvas entonces $\int_{\gamma_2.\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.
3. $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$, donde $(-\gamma(t) = \gamma(a+b-t))$.
4. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t)).\gamma^{'}(t)|dt$.
5. $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq M.Long(\gamma)$, donde $M = max\{|f(\gamma(t))|$, con $a \leq t \leq b\}$ y $Long(\gamma) = \int_a^b |\gamma^{'}(t)|dt$.

Las propiedades 1-3, quedan como ejercicio. Vamos a probar las propiedades 4 y 5.

Demostración de la propiedad 4.
Sea $I = \int_\gamma f(z)dz$, entonces $I = |I|e^{i\theta}$. Luego

$$|I| = Ie^{-i\theta} = e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma e^{-i\theta}f(z)dz = \int_a^b e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)dt.$$

Entonces

$$|I| = \int_a^b \mathbf{Re}[e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)]dt + i\int_a^b \mathbf{Im}[e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)]dt.$$

Como $|I|$ es un número real, se tiene que

$$|I| = \int_a^b \mathbf{Re}[e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)]dt.$$

Como para cualquier $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $Re(z) \leq |z|$ se tiene que

$$|I| = \int_a^b \mathbf{Re}[e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)]dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)|dt \overset{|e^{-i\theta}|=1}{=} \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma^{'}(t)|dt.$$

Demostración de la propiedad 5.

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \overset{\text{Prop. 5}}{\leq} \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma^{'}(t)|dt \overset{M=max_{t\in[a,b]}\{|f(\gamma(t))|\}}{\leq} \int_a^b M|\gamma^{'}(t)|dt =$$

$$M\int_a^b |\gamma^{'}(t)|dt = M.Long(\gamma). \quad \square$$

Ejemplo 6. Calcular la integral de $f(z) = \frac{1}{z}$ sobre el camino cuya imagen es el borde del disco unitario.

Como vimos, no importa cual sea el camino que elejimos para parametrizar el borde del disco unitario. Elijamos $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ dada por

$$\gamma(t) = e^{it} = (\cos t + i\sin t).$$

Luego:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\gamma f(z)dz &= \textstyle\int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \textstyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it}dt = 2\pi i. \end{aligned}$$

En general, para parametrizar el borde del disco de centro a y radio r usaremos la curva $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\gamma(t) = a + re^{it}.$$

Teorema 9 (**Teorema del índice**). *Sean γ un camino cerrado ($\gamma(a) = \gamma(b)$), $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ y la función $\mathrm{Ind}_\gamma : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

Entonces:
i) La función Ind_γ solo toma valores enteros.
ii) La función Ind_γ es continua. Por lo tanto, por el item i), se tiene que es constante en cada componente conexa de Ω.
iii) Si Ω_1 es la componente conexa de Ω que no está acotada entonces $\mathrm{Ind}_\gamma|_{\Omega_1} \equiv 0$.

Demostración. Prueba de i). La demostración se basa en la siguiente afirmación:

Un número complejo $\dfrac{w}{2\pi i}$ es un entero si y sólo si $e^w = 1$.

Por definición

$$\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}ds.$$

Por lo tanto, lo que queremos mostrar es:

definiendo $h(t) = \exp\left(\displaystyle\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z}ds\right)$, que $h(b) = 1$.

Derivando h se tiene

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}, \tag{13}$$

excepto, posiblemente en los puntos donde γ no es diferenciable.
Observe que

$$\left(\frac{h(t)}{\gamma(t)-z}\right)' = \frac{h'(t)(\gamma(t)-z)-h(t)\gamma'(t)}{(\gamma(t)-z)^2} \overset{(13)}{=} 0,$$

excepto en finitos puntos, luego $\left(\frac{h(t)}{\gamma(t)-z}\right)$ es constante.
Como $h(a)=1$ se cumple

$$\left(\frac{h(t)}{\gamma(t)-z}\right) = \frac{1}{\gamma(a)-z},$$

por lo tanto

$$h(t) = \frac{\gamma(t)-z}{\gamma(a)-z}.$$

Como γ es un camino cerrado, se tiene $\gamma(a)=\gamma(b)$, o sea $h(b)=1$.

Prueba de ii). Consideremos $z_0 \in \Omega$. Como $K = \{\gamma(t) : \ t \in [a,b]\}$ es compacto, existen $\delta > 0$ tal que $|\gamma(t)-z_0| > \delta$ para todo $t \in [a,b]$. Sea z suficientemente cercano a z_0 de modo que $|\gamma(t)-z| > \delta/2$ para todo $t \in [a,b]$. Por lo tanto

$$\frac{2}{\delta} \geq \frac{1}{|\gamma(t)-z_0|} \quad \text{y} \quad \frac{2}{\delta} \geq \frac{1}{|\gamma(t)-z|}. \tag{14}$$

Entonces

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)-z} - \frac{\gamma^{'}(t)}{\gamma(t)-z_0}\right)dt\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(z-z_0)\gamma^{'}(t)}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-z_0)}dt\right| =$$

$$\left|\frac{(z-z_0)}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma^{'}(t)}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-z_0)}dt\right| \leq \frac{|z-z_0|}{2\pi}\int_a^b \left|\frac{\gamma^{'}(t)}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-z_0)}\right| dt \overset{(14)}{\leq}$$

$$\frac{|z-z_0|}{2\pi}\int_a^b |\gamma^{'}(t)|.\frac{4}{\delta^2}dt = \frac{|z-z_0|}{2\pi}\frac{4}{\delta^2}\cdot \mathit{Long}(\gamma)\cdot$$

De donde se deduce que $|\mathrm{Ind}_\gamma(z) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_0)| \to 0$ cuando $z \to z_0$.

Prueba de iii). Sea $K = \{\gamma(t) : \ t \in [a,b]\}$. Como K es compacto, por lo tanto es cerrado y acotado. Entonces, como Ω_1 es no acotado, dado $\varepsilon > 0$ existe $z_1 \in \Omega_1$ tal que

$$|\gamma(t)-z_1| > \frac{\mathit{Long}(\gamma)}{\varepsilon} \text{ para todo } t \in [a,b]$$

luego

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_1)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_1}dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t)-z_1|}dt \leq \frac{1}{2\pi}\int_a^b |\gamma'(t)|\frac{\varepsilon}{\mathit{Long}(\gamma)}dt = \frac{\varepsilon}{2\pi} < \varepsilon.$$

Lo que prueba iii). □

Ejemplo 7. Sea γ el círculo unidad orientado positivamente, entonces veremos que:

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| < 1, \\ 0 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Como $\text{Ind}_\gamma(z)$ es una función continua que sólo toma valores enteros, se deduce que es constante en cada componente conexa del complemento de γ. Luego $\text{Ind}_\gamma(z) = \text{Ind}_\gamma(0) = 1$ como fue calculado en el ejemplo 6, y para todo z tal que $|z| < 1$. Para $|z| > 1$ se cumple que $\text{Ind}_\gamma(z)$ vale cero.

6. Teorema local de Cauchy

TEOREMA 10. *Si $f \in H(\Omega)$ y supongamos que existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$ (esto es f tiene primitiva) entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \text{ para todo camino cerrado } \gamma \subset \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Suponga γ definida en $[a, b]$, tenemos $\gamma(a) = \gamma(b)$. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(t)) \mid_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

$\square$

COROLARIO 11. *Se cumple*

$$\int_\gamma z^n dz = 0, \ \ n > -1$$

para todo camino cerrado γ. Vale lo mismo para $n < -1$ si 0 no está en γ.

DEMOSTRACIÓN. Para $n \neq -1$, z^n es la derivada de $\frac{z^{n+1}}{n+1}$, y aplicamos el teorema anterior.

$\square$

Recuerde que para $n = -1$, si $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = e^{it}$, entonces la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(0) = 2\pi i \neq 0.$$

Por lo tanto $Log(z)$ NO es una primitiva de la función $\frac{1}{z}$ en el círculo unidad (ni siquiera es continua en el círculo unidad).

OBSERVACIÓN 2. Las siguientes observaciones serán de mucha ayuda para la demostración del siguiente teorema (Teorema 12).

1. Sea $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $\gamma \subset \Omega$ un camino cerrado. Como las funciones $f(z_0)$ y $f'(z_0)(z - z_0)$ tienen primitivas, entonces (por el Teorema 10)
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)] \, dz.$$
2. Como f es derivalble en $z = z_0$, si llamamos
$$R(z) = \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right] - f^{'}(z_0), \tag{15}$$
se tiene que $\lim_{z \to z_0} R(z) = 0$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que $|R(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Usando esto último y despejando de (15) se cumple que
$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \text{ para todo } z \in D(z_0, r).$$

TEOREMA 12 (Teorema de Cauchy para un triángulo). *Sean Δ un triángulo cerrado contenido en un abierto Ω, $p \in \Omega$, f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si $\partial\Delta$ denota el borde del triángulo y a un camino cuya imagen es $\partial\Delta$ entonces*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0.$$

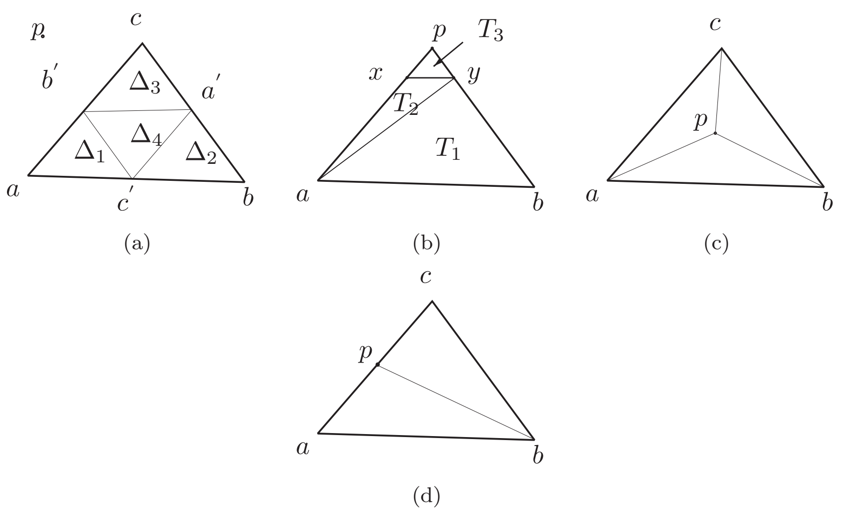


FIGURA 1.

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la prueba en cuatro casos según la posición del punto p.

Primer Caso: $p \notin \Delta$.

Sean a, b, c los vértices de Δ y a', b' y c' los puntos medios de los segmentos que no se cortan en los vértices a, b, c respectivamente. Ver figura.

Consideremos los cuatro triángulos Δ_1, Δ_2, Δ_3 y Δ_4, parametrizandolos en el sentido $\overrightarrow{ac'b'}$, $\overrightarrow{a'c'b}$, $\overrightarrow{cb'a'}$ y $\overrightarrow{a'b'c'}$.

Se tiene que

$$J = \int_{\partial\Delta} f(z)dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_j} f(z)dz,$$

donde el número J es lo que nos interesa. Es claro,que por lo menos uno de los cuatro sumandos de la derecha debe tener módulo mayor o igual a $|J|/4$.

Llamemos Δ^1 al triángulo donde tengamos esa relación. Repetimos con Δ^1 el proceso hecho en Δ, dividirlo en cuatro, elegir uno de los subtriángulos donde la integral sea mayor o igual a el módulo de la integral sobre cuatro. Si continuamos ese proceso, tenderemos una sucesión Δ^n de triángulos tales que la longitud de su borde $\partial\Delta^n$ es $2^{-n}L$, donde L es el perímetro de Δ, y tales que

$$|J| \leq 4^n \left| \int_{\partial\Delta^n} f(z)dz \right|.$$

Sea z_0 el único punto que está en la intersección de todos los Δ^n. Como Δ es cerrado, $z_0 \in \Delta$ y luego f es holomorfa en z_0. Por la observación 2 item 2), implica que, dado $\varepsilon > 0$ existe $r > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \tag{16}$$

para todo z tal que $|z - z_0| < r$. Tambén se tiene que existe n tal que $\Delta^n \subset D(z_0, r)$ y por la observación 2 item 1), se cumple:

$$\int_{\partial \Delta^n} f(z)dz = \int_{\partial \Delta^n} [f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)]\, dz,$$

por lo que junto con la desigualdad (16) implica que:

$$\left| \int_{\partial \Delta^n} f(z)dz \right| \leq \left| \int_{\partial \Delta^n} \varepsilon |z - z_0| dz \right| .$$

Como la longitud de $\partial \Delta^n$ es $2^{-n}L$ y como además tenemos que

$$|z - z_0| < 2^{-n}L \text{ para } z \in \partial \Delta^n.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |J| &\leq 4^n \left| \int_{\partial \Delta^n} f(z)dz \right| \\ &\leq 4^n \varepsilon (2^{-n}L)^2 = \varepsilon L^2. \end{aligned}$$

Como esa desigualdad se cumple para todo $\varepsilon > 0$, debemos tener $J = 0$, si $p \notin \Delta$.

Segundo Caso: $p \in \Delta$ y es uno de los vértices.
Consideremos x, $y \in \partial \Delta$ próximos a p.

Entonces consideremos los triángulos T_1, T_2 y T_3 cuyos vértices son $\{a, b, y\}$, $\{y, x, a\}$ y $\{p, x, y\}$ respectivamente. Las orientaciones respectivas son: $\overrightarrow{aby}$, $\overrightarrow{yxa}$ y $\overrightarrow{pxy}$. Entonces:

$$\int_{\partial \Delta} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial T_2} f(z)dz + \int_{\partial T_3} f(z)dz.$$

Las dos primeras son cero, puesto que p no pertenece a esos triángulos (caso anterior). La tercera puede hacerse muy pequeña, puesto que como f es continua está acotada y el perímetro del triángulo T_3 tiende a cero cuando x, y se aproximan a p. Por lo tanto

$$\int_{\partial \Delta} f(z)dz = 0.$$

Tercer Caso: p pertenece al interior de Δ.

Consideramos los triángulos (mirar figura 1 (c)), de los cuales damos los vértices y su orientación; $\overrightarrow{apb}$, $\overrightarrow{acp}$ y $\overrightarrow{cbp}$. La suma de las integrales en los bordes de estos triángulos da la integral en $\partial \Delta$ y cada una es 0 porque p es vértice de ellos (caso 2).

Cuarto Caso: $p \in \partial \Delta$ pero no es un vértice.
Queda como ejercicio.

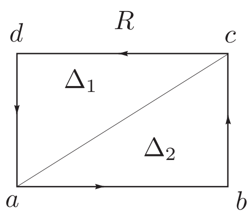
$\square$

Corolario 13. *Sean R un rectángulo cerrado contenido en un abierto Ω, $p \in \Omega$, f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si ∂R denota el borde del rectángulo y a un camino cuya imagen es ∂R entonces*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Demostración. Orientemos el ∂R de la forma $\overrightarrow{abcd}$. Consideremos la triángulos Δ_1 y Δ_2 como en la figura 2. Orientamos el triángulo Δ_1 de la forma $\overrightarrow{abc}$ y el triángulos Δ_2 de la forma $\overrightarrow{cda}$. Aplicando el resultado anterior tenemos que $\int_{\partial\Delta_1} f(w)dw = \int_{\partial\Delta_2} f(w)dw = 0$. Por otro lado tenemos que $\int_{\partial\Delta_1} f(w)dw + \int_{\partial\Delta_2} f(w)dw = \int_{\partial R} f(w)dw$.

□



(a)

Figura 2.

Dados dos puntos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ definimos el segmento $[z_1, z_2]$ como

$$[z_1, z_2] = \{tz_2 + (1-t)z_1 : \quad t \in [0,1]\}.$$

Una forma de parametrizar el segmento $[z_1, z_2]$ es definir $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ siendo $\gamma(t) = tz_2 + (1-t)z_1$.
Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es convexo si para todo par de puntos $z_1, z_2 \in \Omega$ se cumple que $[z_1, z_2] \subset \Omega$.

Teorema 14 (Teorema de Cauchy en un convexo). *Sea Ω un abierto convexo, $p \in \Omega$, f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Entonces $F' = f$ para alguna $F \in H(\Omega)$ (f tiene primitiva). Del Teorema 10, tenemos que:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \text{ para todo } \gamma \text{ en } \Omega.$$

Demostración. Fijemos $a \in \Omega$. Dado $z \in \Omega$, como Ω es convexo, el segmento $[a, z]$ está contenido en Ω. Por lo tanto definimos

$$F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi.$$

Mostraremos que $F \in H(\Omega)$ y que $F' = f$. Sea $z_0 \in \Omega$. Consideramos triángulo Δ cuyos vértices son a, z y z_0 y con la orientación $\overrightarrow{azz_0}$. Al ser Ω convexo, el triángulo está contenido en Ω, por lo tanto podemos aplicar el Teorema 12 para obtener:

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(\xi)d\xi = \underbrace{\int_{[a,z]} f(\xi)d\xi}_{F(z)} + \int_{[z,z_0]} f(\xi)d\xi + \underbrace{\int_{[z_0,a]} f(\xi)d\xi}_{-F(z_0)}.$$

Por lo tanto tenemos que

$$F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi. \tag{17}$$

Por otro lado, parametrizando el segmento $[z_0, z]$ con el camino $\gamma[0,1] \to \mathbb{C}$ con $\gamma(t) = tz + (1-t)z_0$, es fácil ver que

$$f(z_0) = \frac{\int_{[z_0,z]} f(z_0)d\xi}{z - z_0}. \tag{18}$$

Así, si $z \neq z_0$, se tiene:

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \overset{(17)}{=} \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} f(\xi)d\xi - f(z_0) \overset{(18)}{=} \frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} [f(\xi) - f(z_0)]d\xi.$$

Como f es continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon$ para todo ξ tal que $|\xi - z_0| < \delta$. Por lo tanto se deduce que:

$$\left|\frac{1}{z - z_0}\int_{[z_0,z]} [f(\xi) - f(z_0)]d\xi\right| \leq \frac{1}{|z - z_0|}\int_{[z_0,z]} |f(\xi) - f(z_0)|\, d\xi \leq \frac{1}{|z - z_0|}\varepsilon.Long([z_0, z]) = \varepsilon.$$

De donde se deduce que

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| < \varepsilon \text{ si } |z - z_0| < \delta,$$

y por lo tanto $F'(z_0) = f(z_0)$. Aplicando el Teorema 10 tenemos que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para todo γ en Ω. $\square$

Teorema 15 (Fórmula de Cauchy en un convexo). *Sea γ un camino cerrado en un convexo abierto Ω y $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega \setminus \gamma$ entonces*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Demostración. Fijamos $z \in \Omega \setminus \gamma$ para definir

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \xi \neq z, \\ f'(z) & \xi = z. \end{cases}$$

Como g es continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{z\}$ se verifica la hipótesis del teorema anterior. Por lo tanto se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\xi)d\xi = 0.$$

Luego

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{\xi - z}d\xi. =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi - f(z)\mathrm{Ind}_\gamma(z).$$

De esto último deducimos la fórmula de Cauchy. □

Ejemplo.
Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{it}$. Calcular

$$\int_\gamma \frac{dw}{sen(w)}.$$

Primero observemos que

$$\int_\gamma \frac{dw}{sen(w)} = \int_\gamma \frac{\frac{w}{sen(w)}}{w} dw.$$

Definimos la función $f : D(0, r) \to \mathbb{C}$ con $1 < r < \pi$ y tal que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{sen(z)} & si \quad z \neq 0, \\ 1 & si \quad z = 0. \end{cases}$$

Es claro que para $z \neq 0$ se cumple que f es derivable. Para $z = 0$, tenemos que

$$\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{\frac{z}{sen(z)} - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{z - sen(z)}{z sen(z)} = 0.$$

Por lo tanto se tiene que $f \in H(D(0, r))$. Por la Fórmula de Cauchy se tiene que

$$1 = f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - 0} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\frac{w}{sen(w)}}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{sen(w)}.$$

Por lo tanto $\int_\gamma \frac{dw}{sen(w)} = 2\pi i$.

7. Representación en series de potencias.

TEOREMA 16. *Toda $f \in H(\Omega)$, donde Ω es un abierto cualquiera del plano, es representable en series de potencias.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in H(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, puesto que Ω es abierto. Consideramos $r^{'}$ con $0 < r^{'} < r$.

Como $D(a,r)$ es un convexo, tenemos, que si γ es el borde de $D(a,r^{'})$ entonces para cualquier $z \in D(a,r^{'})$, por el Teorema 15 se cumple que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

Recordamos que si $|q| < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Observe que, cuando $z \in D(a,r^{'})$ y $\xi \in \partial D(a,r^{'})$ se cumple que $|z-a| < |\xi - a|$, tomando $q = \frac{z-a}{\xi-a}$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n = \frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)} = \frac{\xi-a}{\xi-z}.$$

Por lo tanto

$$\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n.$$

Como $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| < 1$ para $z \in D(a,r^{'})$, la serie en cuestión es uniformemente convergente[1] y por lo tanto:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n d\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi(z-a)^n.$$

que es válido para $|z-a| < r^{'}$. □

Observaciones importantes:

1. La representación $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi(z-a)^n$ vale para todo $|z-a| < r$ siempre que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ y que γ sea el borde de $D(a,r)$.

2. Como corolario de este teorema se obtiene: Si $f \in H(\Omega)$ entonces $f' \in H(\Omega)$. Ya que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es representable en serie de potencias y por el Teorema 6 $f^{'}$ es también una serie de potencias y por tanto holomorfa.

3. Cuando probamos que toda serie de potencias es holomorfa, vimos que los coeficientes de la serie $\{a_n\}$ son

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

[1]Mirar resultado en el apendice sobre intercambiar límite e integral.

De lo que acabamos de mostrar, deducimos que:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{(n+1)}}d\xi.$$

A continuación probaremos algunos resultados que son consecuencias de los teoremas anteriores.

Regla de L$'$Hopital.

PROPOSICIÓN 9. *Sean* $f, g \in H(\Omega)$ *no nulas y* $a \in \Omega$ *con* $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = 0$. *Entonces*

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Como $f \in H(\Omega)$, por el Teorema 16 se tiene que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$. Como f no es la función nula, tiene que existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} \neq 0$.
consideremos

$$m = \min\{n > 0/\ a_n \neq 0\}$$

escribimos

$$f(z) = a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1}\cdots a_n(z-a)^n\cdots =$$
$$(z-a)^m\left(a_m + a_{m+1}(z-a)\cdots a_n(z-a)^{n-m}\cdots\right) =$$

$$= (z-a)^m\sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^{n-m} = (z-a)^m\sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-a)^n.$$

Si definimos $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m}(z-a)^n$, se cumple que la misma es holomorfa en $D(a,r)$ y $f_1(a) = a_m \neq 0$.
Podemos hacer el mismo razonamiento para g y obtenemos que $g(z) = (z-a)^q g_1(z)$ con $q \in \mathbb{N}$ y $g_1(a) \neq 0$. Por lo tanto

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^m f_1(z)}{(z-a)^q g_1(z)} = \begin{cases} 0 & si \quad m > q, \\ \frac{f_1(a)}{g_1(a)} & si \quad m = q, \\ \infty & si \quad m < q. \end{cases}$$

Por otro lado $f'(z) = (z-a)^{m-1}[mf_1(z) + (z-a)f_1'(z)]$ y $g'(z) = (z-a)^{q-1}[qg_1(z) + (z-a)g_1'(z)]$. Por lo tanto

$$\lim_{z\to a}\frac{f'(z)}{g'(z)} = \lim_{z\to a}\frac{(z-a)^{m-1}[mf_1(z) + (z-a)f_1'(z)]}{(z-a)^{q-1}[qg_1(z) + (z-a)g_1'(z)]} = \begin{cases} 0 & si \quad m > q, \\ \frac{f_1(a)}{g_1(a)} & si \quad m = q, \\ \infty & si \quad m < q. \end{cases}$$

□

TEOREMA 17. **Teorema de Morera.**
Sea f *continua en un abierto* Ω *tal que* $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$ *para todo triángulo* $\Delta \subset \Omega$. *Entonces* $f \in H(\Omega)$.

Demostración. Sea V un convexo contenido en Ω, luego si definimos $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)d\xi$ donde a es fijo en V y $z \in V$, entonces $F \in H(\Omega)$ y $F' = f$. Por la observación 2 se tiene que $f \in H(\Omega)$. □

8. Ceros de funciones holomorfas

Sigamos explotando las consecuencias de la representación en serie de potencias de una función holomorfa.

Teorema 18. *Sean Ω una abierto conexo, $f \in H(\Omega)$ y $Z(f)$ el conjunto de ceros de f en Ω, esto es*

$$Z(f) = \{a \in \Omega / \ f(a) = 0\}.$$

Entonces son equivalentes:

1. *$f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$.*
2. *$Z(f)$ tiene un punto de acumulación en Ω.*
3. *Existe $\alpha \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(\alpha) = 0 \ \forall n \geq 0$.*

Demostración. Es claro que 1 implica 2 y 3.
3 implica 2 ya que si $D(\alpha, r) \subset \Omega$ y $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n$ es la representación de $f(z)$ en $D(\alpha, r)$, como $a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = 0$, tenemos que $f(z) = 0$ para todo $z \in D(\alpha, r)$.

Ahora falta probar que 2 implica 1. Suponga que $a \in \Omega$ es un punto de acumulación de $Z(f)$ y se a $D(a, r)$ un disco contenido en Ω. Para $z \in D(a, r)$ vale

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\alpha)^n.$$

Prabaremos primero que $a_n = 0$ para todo n. Si así no fuese , consideremos

$$m = \text{mín}\{n > 0 / \ a_n \neq 0\}$$

escribimos

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=m}^{\infty} a_n(z-a)^{n-m} = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-a)^n.$$

Si definimos $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m}(z-a)^n$, se cumple que la misma es holomorfa en $D(a, r)$ y $g(a) = a_m \neq 0$. Luego existe un entorno de a donde g no se anula. Como $(z-a)^m$ solo se anula en a, concluimos que $f(z) \neq 0$ para todo z en un entorno reducido del punto a.
Esto contradice la hipótesis de que a es punto de acumulación de $Z(f)$. La contradicción provino de suponer que algún $a_n \neq 0$. Luego $a_n = 0$ para todo n y entonces $f(z) = 0$ en $D(a, r)$.
Hemos probado que si a es de acumulación de $Z(f)$ y $D(a, r) \subset \Omega$ entonces $f(z) = 0$ en $D(a, r)$. Falta probar que $f(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. Sea $a_1 \in \Omega$ un punto cualquiera. Como Ω es abierto y conexo existe una curva γ contenida en Ω que une a con a_1. Esto es $\gamma : [0, 1] \to \Omega$ con $\gamma(0) = a$ y $\gamma(1) = a_1$. Sea

$$t_0 = Sup\{t \in [0, 1] : f(\gamma(t)) = 0 \text{ y } \gamma(t) \text{ está acumulado por ceros de } f\}.$$

Vamos a probar que $t_0 = 1$ y con esto probamos que $f(a_1) = 0$. Supongamos que $t_0 \neq 1$. Es claro que $\gamma(t_0))$ es un cero de f no aislado. Por lo probado anteriormente hay un entorno de $\gamma(t_0))$ donde f se anula. Esto contradice la definición de t_0. □

OBSERVACIÓN 3.

1. Como consecuencia de la demostración anterior (2 implica 1), tenemos que si $f \in H(\Omega)$, $a \in \Omega$ y f es distinta de la función nula, entonces existe $m \in \mathbb{N}$, $r > 0$, con $D(a,r) \subset \Omega$ y $h \in H(D(a,r))$ tales que:
$$f(z) = (z-a)^n h(z) \text{ donde } h(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in D(a,r).$$
2. Una función holomorfa puede tener infinitos ceros como lo muestra el siguiente ejemplo: Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^z - 1$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene que $f(2\pi i n) = 0$. Lo que dice el resultado anterior es que los ceros de f no pueden acumular en Ω.

COROLARIO 19. *Sean $f, g \in H(\Omega)$, Ω conexo.*

1. *Si $f(z) = g(z)$ en un conjunto de puntos que tiene un punto de acumulación en Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo punto de Ω.*
2. *Si $f(z)g(z) = 0$ para todo z entonces $f = 0$ o $g = 0$.*

La demostración queda como ejercicio.

9. Singularidades.

Antes de definir lo que es una singularidad. Vamos a demostrar un par de resultados que serán de mucha utlidad.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = |x|$ tiene la propiedad de ser continua en $\mathbb{R}$ y ser derivable en todos los puntos excepto en $x = 0$.
El siguiente resultado muestra que esto no es posible en $\mathbb{C}$.

PROPOSICIÓN 10. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ con f continua en Ω y $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ con $a \in \Omega$. Entonces $f \in H(\Omega)$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que
$$g(z) = \begin{cases} (z-a)f(z) & si \quad z \neq a, \\ 0 & si \quad z = a. \end{cases}$$

Claramente g es holomorfa en $\Omega \setminus \{a\}$ por ser producto de funciones holomorfas. Vamos a probar que g es holomorfa en $z = a$.

$$g^{'}(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z)-g(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} f(z) = f(a) \text{ (por ser } f \text{ continua).}$$

Como $g \in H(\Omega)$ entonces es representable en serie de potencias y por lo tanto
$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \ldots =$$
Como $a_0 = g(a) = 0$ tenemmos que
$$g(z) = a_1(z-a) + \ldots + a_n(z-a)^n + \cdots = (z-a)(a_1 + \ldots + a_n(z-a)^{n-1} + \cdots) =$$
$$(z-a)h(z) \text{ donde } h \text{ es la función } h(z) = a_1 + \ldots + a_n(z-a)^{n-1} + \cdots$$

Por ser h una serie de potencias se tiene que $h \in H(D(a,r))$ para algún $r > 0$.
Vamos a probar que $h(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a,r)$.
Si $z = a$ se tiene que $h(a) = g^{'}(a) = f(a)$.
Si $z \neq a$ como $g(z) = (z-a)f(z)$ y $g(z) = (z-a)h(z)$ entonces $(z-a)f(z) = (z-a)h(z)$. Simplificando (porque $z \neq a$) se tiene que $f(z) = h(z)$.

$\square$

Dados dos conjuntos abierto Ω_1, Ω_2 con $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega_1)$. Decimos que $F : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ es una extensión holomorfa de f, si $F \in H(\Omega_2)$ y $F|_{\Omega_1} = f$.

Proposición 11. *Sean $r > 0$, $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ con f acotada en $D(a,r) \setminus \{a\}$ y $f \in H(D(a,r) \setminus \{a\})$. Entonces existe $F \in H(D(a,r))$ tal que $F(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$. Esto es, F es una extensión holomorfa de f.*

Demostración. Primero observe que no necesariamente existe $\lim_{z\to a} f(z)$, por lo que no podemos aplicar la proposición anterior (proposición 10).
Consideramos la función

$$g(z) = \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & si \quad z \neq a, \\ 0 & si \quad z = a. \end{cases}$$

Al ser f acotada se tiene que g es continua en $D(a,r)$. Claramente g es holomorfa en $D(a,r) \setminus \{a\}$ por ser producto de funciones holomorfas. Vamos a probar que g es holomorfa en $z = a$.

$$g^{'}(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z) - g(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^2 f(z)}{z-a} = \lim_{z\to a} (z-a) f(z) = 0 \text{ (por ser } f \text{ acotada).}$$

Como $g(a) = g^{'}(a) = 0$ entonces (razonando como en la proposición anterior) $g(z) = (z-a)^2 F(z)$ con $F \in H(D(a,r))$.
Sea $z \neq a$ Por un lado $g(z) = (z-a)^2 f(z)$ y por otro lado $g(z) = (z-a)^2 F(z)$ entonces $(z-a)^2 f(z) = (z-a)^2 F(z)$. Como $z \neq a$ se tiene que $f(z) = F(z)$. $\square$

Definición 16. Un punto $a \in \Omega$ es una **singularidad aislada** de f, si $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. La singularidad se llama **evitable** si f puede extenderse a una función holomorfa en todo Ω.

Por la proposición 11, si $f : D(a,r) \to \mathbb{C}$ es f acotada en $D(a,r) \setminus \{a\}$ y $f \in H(D(a,r) \setminus \{a\})$, entonces f tiene una singularidad evitable.

Teorema 20. *Sea $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ entonces exactamente una de las tres condiciones siguientes se debe verificar:*
i) f tiene una singularidad evitable en a.
ii) Existen números $c_1, ..., c_m$ con $c_m \neq 0$ tales que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tiene una singularidad evitable en a.
iii) Si $D(a,r) \subset \Omega$ entonces $f(D^{'}(a,r))$ es denso en $\mathbb{C}$.

En el caso $ii)$ se dice que f tiene **un polo de orden** m en a. En este caso, $f(z) \to \infty$ cuando $z \to a$.
En el caso $iii)$ diremos que f tiene una **singularidad esencial** en el punto a. En este caso No existe $\lim_{z\to a} f(z)$ y f NO está acotada.

Demostración. Suponga que no vale $iii)$, entonces existe $w \in C$, $r > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$|f(z) - w| > \delta \quad \text{para todo} \quad z \in D^{'}(a, r)$$

Consideramos la función g tal que

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Entonces g es holomorfa en $D^{'}(a, r)$ y está acotada en $D^{'}(a, r)$, puesto que

$$|g(z)| < \frac{1}{\delta}.$$

Luego se tiene que podemos extender g a una función holomorfa en $D(a, r)$, esto es, podemos definir $g(a)$ de manera que $g \in H(D(a, r))$.
Si $g(a) \neq 0$, como $f(z) = 1/g(z) + w$, tendríamos que

$$\lim_{z \to a} f(z) = \frac{1}{g(a)} + w$$

, de donde se deduce que f está acotada en $D^{'}(a, r)$. Luego, la singularidad es evitable y encontramos el caso $i)$.
si $g(a) = 0$, entonces es posible escribir para todo $z \in D(a, r)$:

$$g(z) = \sum_{n=m}^{+\infty} a_m (z - a)^m \quad \text{donde } m \geq 1$$

Por lo tanto,

$$g(z) = (z - a)^m \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m+n} (z - a)^n$$

y si definimos

$$g_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m+n} (z - a)^n$$

entonces $g_1 \in H(D(a, r))$ y $g_1(a) = a_m \neq 0$. Luego $h(z) = 1/(g_1(z))$ es holomorfa en un disco $D(a, \rho) \subset D(a, r^{'})$. Se deduce que

$$h(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - a)^n \quad \text{con} \quad b_0 \neq 0 \quad \text{puesto que} \quad h(a) \neq 0$$

finalmente:

$$f(z) = (z - a)^{-m} h(z) + w = (z - a)^{-m} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z - a)^n + w =$$

$$b_0 (z - a)^{-m} + b_1 (z - a)^{-(m-1)} + \cdots + b_{m-1} (z - a)^{-1} + w + \sum_{k=0}^{+\infty} b_{m+k} (z - a)^k$$

Por lo tanto

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{m-k}}{(z - a)^k} \quad \text{tiene una singularidad evitable en} \quad a$$

Es claro que si se cumple 3. No se cumple ni 1. ni 2. □

A partir de este último resultado tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 21. *Sea* $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$ *entonces*

1. f *tiene una sigularidad evitable en* a *si y solo si existe y es un número complejo el* $\lim_{z\to a} f(z)$.
2. f *tiene polo en* a *si y solo si* $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$.
3. f *tiene una sigularidad esencial en* a *si y solo si No existe* $\lim_{z\to a} f(z)$.

DEMOSTRACIÓN. **Vamos a probar 1.** ($\Rightarrow$) Si f tiene una sigularidad evitable en a, entonces existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$. Luego $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} F(z) = F(a)$.
($\Leftarrow$) Basta aplicar la proposición 11.
Prueba del item 2. ($\Rightarrow$) Si f tiene un polo en a, entonces existen números $c_1, ..., c_m$ con $c_m \neq 0$ tales que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$$

tiene singularidad evitable en a. Luego

$$lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} = \infty$$

($\Leftarrow$) Si f tiene una sigularidad evitable entonces $\lim_{z\to a} f(z)$ es finito y si f tiene una sigularidad esencial no existe $\lim_{z\to a} f(z)$. Por lo tanto f tiene polo en a.
Prueba del item 3. ($\Rightarrow$) Si f tiene una singularidad esencial en a, entonces $f(D^{'}(a,r))$ es denso en $\mathbb{C}$ para todo $r > 0$ con $D(a,r) \subset \Omega$. Luego No existe $\lim_{z\to a} f(z)$.
($\Leftarrow$) Si f tiene una sigularidad evitable entonces $\lim_{z\to a} f(z)$ es finito y si f tiene un polo $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$. Por lo tanto f tiene una sigularidad esencial en a. $\square$

Ejemplos.
Consideramos las funciones f, g y h definidas en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que

$$i)\ f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \qquad ii)\ g(z) = \frac{1}{z} \qquad iii)\ h(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

Aplicando L'Hopital se cumple que $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z} = \lim_{z\to 0} e^z = 1$. Por lo tanto f tiene una singularidad evitable en $z = 0$.
Claramente $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$. Por lo tanto f tiene un polo en $z = 0$.
Tomando $z = x + iy$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{1}{x+iy}}$$

Si consideramos $y = 0$ nos queda $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$. Si hacemos tender $x \to 0^+$ nos queda $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$. Y si hacemos tender $x \to 0^-$ nos queda $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$. Por lo tanto no existe el $\lim_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$ lo que implica que es una singularidad esencial.

Por último, como consecuencia del Teorema 20, tenemos el siguiente resultado que será de mucha ayuda.

Proposición 12. *Sea $a \in \Omega$, $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Si f tiene un polo de orden m en $z = a$, entonces existe, $r > 0$, con $D(a,r) \subset \Omega$ y $h \in H(D(a,r))$ tales que:*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \text{ donde } h(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in D(a,r).$$

Demostración. Como f tiene un polo de orden m en $z = a$, entonces la función $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k}$ tiene singularidad evitable en a. Entonces g se extiende a una función holomorfa. Llamaremos G a la extensión holomorfa de g. Luego

$$f(z) = G(z) + \frac{c_1}{z-a} + \cdots + \frac{c_m}{(z-a)^m} = \frac{G(z)(z-a)^m + c_1(z-a)^{m-1} + \cdots + c_{m-1}(z-a) + c_m}{(z-a)^m}.$$

Sea $h(z) = G(z)(z-a)^m + c_1(z-a)^{m-1} + \cdots + c_{m-1}(z-a) + c_m$, como $h(a) = c_m \neq 0$, tenemos probada la proposición.

□

De lo anterior deducimos que

$$\lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = \lim_{z \to a} (z-a)^n \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \begin{cases} 0 & si \quad n > m, \\ h(a) \neq 0 & si \quad n = m \\ \infty & si \quad n < m. \end{cases}$$

Por lo tanto, para hallar el orden de un polo, basta con encontrar un número natural m tal que

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \text{ sea distinto de cero y de infinito.}$$

Ejemplo.
Considere $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to C$ tal que

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^6}.$$

Claramente $\lim_{z \to 0} f(z) = \infty$. Entonces f tiene un polo en $z = 0$. Como

$$\lim_{z \to 0} z^5 \left(\frac{e^z - 1}{z^6} \right) = \lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Entonces f tiene un polo de orden 5 en $z = 0$

Capítulo 4

Propiedades Globales de Funciones Holomorfas

1. Funciones enteras.

Definición 17. Si $f \in H(C)$ entonces f se llama entera.

Teorema 22. **Estimativas de Cauchy.** *Sea $f \in H(\Omega)$ y $D(a,r) \subset \Omega$. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(a,r)$ entonces, para cualquier $\rho < r$ y todo $n \in N$ se cumple que*

$$|f^n(a)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}.$$

Demostración. Por la fórmula de Cauchy para las derivadas, se tiene que cualquier $\rho < r$, si γ es el borde de $D(a,\rho)$ orientado positivamente, se tiene que:

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

se concluye

$$|f^n(a)| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

como $|f(z)| \leq M$

$$\textit{entonces}\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{\rho^{n+1}} \quad \text{para} \quad |z-a| = \rho$$

Concluimos que

$$|f^n(a)| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}2\pi\rho\frac{M}{\rho^{n+1}} = \frac{n!M}{\rho^n}$$

□

Teorema 23. **Liouville**. *Si f es entera y acotada, entonces es constante.*

Demostración. Si f es acotada, existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C.$$

El teorema anterior lo aplicamos para $n = 1$, $a \in C$ y ρ puede ser cualquiera, ya que $f \in H(C)$. Entonces:

$$|f^{'}(a)| \leq \frac{M}{\rho} \quad \forall \rho > 0.$$

Luego, tomando límite cuando $\rho \to +\infty$, tenemos que $|f^{'}(a)| = 0$. Como vale $\forall a \in C$, implica que $f^{'} \equiv 0$. Luego f es cte.

DEFINICIÓN 18. Sea $f \in H(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Decimos que $|f|$ tiene un máximo local estricto en a si existe $D(a,r) \subset \Omega$ tal que

$$|f(a) > |f(z)| \quad \forall z \in D(a,r) \setminus \{a\} = D^{'}(a,r).$$

TEOREMA 24. **Teorema del módulo máximo.** *Sea $f \in H(\Omega)$. Entonces $|f|$ no tiene máximo local estricto en puntos $a \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario, esto es, existe un punto $a \in \Omega$ tal que $|f(a)| > |f(z)|$ para todo $z \in D^{'}(a,r)$ para algún $r > 0$. En particular, si $\rho < r$, $|f(a)| > |f(a+\rho e^{i\theta})|$, $\forall \theta \in [0, 2\pi]$. Sin embargo por la fórmula de Cauchy:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Donde γ es $\partial D(a,\rho)$ orientado positivamente.
Se deduce que

$$|f(a)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+\rho e^{i\theta})}{a+\rho e^{i\theta}-a} i\rho e^{i\theta} d\theta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{i\theta})| d\theta < \frac{1}{2\pi}|f(a)|2\pi = |f(a)|$$

lo que implica una contradicción. □

TEOREMA 25. **Teorema fundamental del álgebra.** *Sea P un polinomio de grado $m > 0$. Entonces P tiene m raíces, contando sus multiplicidades.*

OBSERVACIÓN 4. Esto quiere decir que $P(z) = z^2(z-1)$ tiene 3 raíces: 1 una vez y 0 dos veces.

DEMOSTRACIÓN. Si P no se anula en $\mathbb{C}$, entonces $f(z) = 1/P(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$. Esto es P es entera. Pero es también acotada, ya que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Se deduce por el Teorema de Liouville (Teorema 23) que f es constante. Por lo tanto P es constante, pero esto no puede se ya que el grado del polinomio es $m > 0$. Se deduce que P se anula en algún punto $z_1 \in C$. Pero entonces $P(z) = (z-z_1)Q(z)$ donde Q es un polinomio de grado $m-1$, y se repite el argumento. □

Ejemplo.
Sea $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$, $f \in H(D)$ tal que $|f(z)| < 1 - |z|$ para todo $z \in D$. Probar que $f \equiv 0$.

Supongamos que f no es la función nula en D. Entonces existe $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) \neq 0$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que cumple las siguientes propiedades:

- $0 < \varepsilon < |f(z_0)|$.
- $z_0 \in \overline{D_{1-\varepsilon}} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1 - \varepsilon\}$.

Como $|f|$ es continua y $\overline{D_{1-\varepsilon}}$ es un conjunto compacto entonces $|f|$ tiene máximo en $\overline{D_{1-\varepsilon}}$. Por otro lado tenemos que si $z \in \partial\overline{D_{1-\varepsilon}}$(= el borde de $\overline{D_{1-\varepsilon}}$) se cumple que

$$|f(z)| < 1 - |z| = 1 - (1-\varepsilon) = \varepsilon < |f(z_0)|.$$

Por lo tanto el máximo de $|f|$ en $\overline{D_{1-\varepsilon}}$ está en el interior de $\overline{D_{1-\varepsilon}}$, lo que contradice el principio del máximo. □

Para la demostración del siguiente teorema vamos a utilizar el Teorema de la función inversa que enunciamos a continuación.

TEOREMA 26. **Teorema de la función inversa.** *Sea* $f : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *de clase* C^k, z_0 *interior a* Ω *,*$J_f(z_0)$ *invertible. Entonces existe* V *de* z_0 *contenido en* Ω *y* W *un entorno de* $f(z_0)$ *tal que* $f : V \to W$ *es biyectiva y su inversa* $f^{-1} : W \to V$ *es de clase* C^k*.*

TEOREMA 27. *Sea* $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ *y* $f^{'}(z_0) \neq 0$*. Entonces existe un entorno* V *de* z_0 *contenido en* Ω *y* W *un entorno de* $f(z_0)$ *tal que:*
i) $f : V \to W$ *es biyectiva.*
ii) Si $\psi : W \to V$ *es la inversa de* f *entonces* $\psi \in H(W)$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z = x + iy$ y $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. El Jacobiando de f es

$$J_f(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, usando que $u_x = v_y$ y que $u_y = -v_x$ se tiene que

$$det(J_f(x, y)) = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = |f^{'}(z)|^2.$$

Como, por hipótesis se tiene que $f^{'}(z_0) \neq 0$ entonces $det(J_f) \neq 0$. Luego aplicando el Teorema de la función inversa tenemos probado la parte i).

ii) Sean $w, w_1 \in W = f(V)$ con $w = f(z)$ y $w_1 = f(z_1)$. Entonces

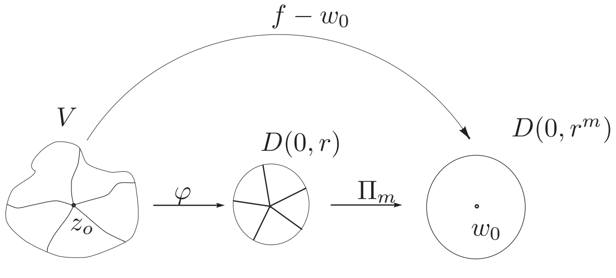
$$\frac{\psi(w_1) - \psi(w)}{w_1 - w} = \frac{z_1 - z}{f(z_1) - f(z)}$$

Tomando límite cuando $w_1 \to w$, tenemos que $z_1 \to z$. Por lo tanto, como $f^{'}(z) \neq 0$:

$$\lim_{w \to w_1} \frac{\psi(w_1) - \psi(w)}{w_1 - w} = \lim_{z \to z_1} \frac{z_1 - z}{f(z_1) - f(z)} = \frac{1}{f^{'}(z)}.$$

DEFINICIÓN 19. Sea $\Pi_m(z) = z^m$.

PROPOSICIÓN 13. **Estructura local** *Sea* $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ *y* f *no constante. Entonces existe* V *entorno de* z_0 *tal que:*
i) $f(z) - w_0 = \Pi_m(\varphi(z))$ *para una* $\varphi \in H(V)$*.*
ii) φ *es inyectiva en* V, $\varphi^{'}(z) \neq 0$ $\forall z \in V$ *y* $\varphi(V) = D(0, r)$*.*



OBSERVACIÓN 5. El m que aparece en $i)$ es el orden del cero que $f(z)-w_0$ tiene en z_0. Este teorema muestra que para cada $u \in D(0, r^m)\backslash\{0\}$ existen $v_1, \cdots, v_m$ puntos en V tales que $f(v_i) = u$, $\forall i = 1, .., m$; esto suele expresarse así: f es localmente m a 1 en z_0. Vea que si $m = 1$ entonces este teorema es caso particular del anterior ya que $f^{'}(z_0) \neq 0$.

DEMOSTRACIÓN. Si m es el orden del cero de $f(z) - w_0$ en z_0 entonces

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z) \text{ con } g(z_0) \neq 0$$

donde $g \in H(\Omega)$ y existe $r > 0$ (por la continuidad de g) tal que $g(z) \neq 0$, $\forall z \in D(z_0, r)$. Como g no se anula en $D(z_0, r)$ y cualquier disco es un conjunto convexo, entonces se cumple que la función $h(z) = \frac{g^{'}(z)}{g(z)}$ es holomorfa en $D(z_0, r)$. Por lo tanto, por el Teorema de Cauchy en el convexo $D(z_0, r)$ se tiene que existe una función H holomorfa en $D(z_0, r)$ tal que $H^{'} = h$.

Por lo tanto $(e^{-H}.g)^{'} = e^{-H}.H^{'}g - e^{-H}.g^{'} = e^{-H}(H^{'}g - g^{'}) = 0$ (ya que $H^{'}(z) = \frac{g^{'}(z)}{g(z)}$)

Se deduce que se puede obtener, sumando una constante a H que $g(z) = e^{H(z)}$. Sea ahora

$$\varphi(z) = (z - z_0)e^{\frac{H(z)}{m}}$$

obviamente esto implica que

$$f(z) - w_0 = \Pi_m(\varphi(z))$$

lo que demuestra $i)$.

Para $ii)$ basta utilizar el Teorema de la función inversa, observando que $\varphi(z_0) = 0$ y $\varphi^{'}(z_0) \neq 0$.

COROLARIO 28. *Si $f \in H(\Omega)$, entonces f es abierta.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $z_0 \in \Omega$. Por el teorema anterior, existe un entorno V de z_0, $V \subset \Omega$ tal que

$$\begin{aligned} f(V) &= w_0 + \Pi_m(\varphi(V)) \\ &= w_0 + \Pi_m(D(0, r)) \\ &= w_0 + D(0, r^m) = D(w_0, r^m). \end{aligned}$$

COROLARIO 29. *Sea $f \in H(\Omega)$ tal que f es inyectiva en Ω. Entonces $f^{'}(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ y la inversa de f es holomorfa.*

Antes de demostrar este corolario vamos hacer dos observaciones:
i) Si $f^{'}(z) \neq 0$ no implica que f sea biyectiva, basta tomar $f(z) = e^z$.
ii) Si $f^{'}(z_0) = 0$ entonces por la proposición 13; f no es inyectiva. Este hecho no sucede en R ya que para $f(x) = x^3$ se tiene que $f^{'}(0) = 0$ y f es biyectiva.

Demostración : Si $f^{'}(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in \Omega$, entonces $f(z) - f(z_0)$ tiene un cero de orden $m > 1$ en z_0, luego por la proposición 13 f no puede ser inyectiva. Que la función inversa sea holomorfa sale del Teorema 27 parte $ii)$.

Otro corolario es el siguiente:

COROLARIO 30. *Si $f \in H(\Omega)$ y $|f(z)|$ es constante en Ω, entonces f es constante en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|f(z)|$ es constante en Ω, entonces $f(\Omega)$ está contenido en el borde de un disco de centro 0 y radio $r \geq 0$. Luego $f(\Omega)$ no es un conjunto abierto y por lo tanto f es constante.

Capítulo 5

Teorema global de Cauchy y sus consecuencias.

1. Homotopias

Definición 20. Sean γ_0, γ_1 dos caminos cerrados definidos en $[0,1]$ y contenidos en Ω. γ_0, γ_1 se dicen homotópicos en Ω si existe una función continua $H : [0,1]\times[0,1] \to \Omega$ tal que:
i) $H(s,0) = \gamma_0(s)$, $H(s,1) = \gamma_1(s)$, $\forall s \in [0,1]$.
ii) $H(0,t) = H(1,t)$, $\forall t \in [0,1]$.

Si para cada t fijo se considera la curva continua $s \to H(s,t)$, la condición $ii)$ dice que esta curva es cerrada, la condición $i)$ dice que la primer curva $s \to H(s,0)$ es γ_0 y la última $s \to H(s,1)$ es γ_1. En otras palabras H es una deformación continua de γ_0 a γ_1.
Un abierto Ω se dice simplemente conexo si es conexo y si cada curva γ en Ω es homotópica a una curva constante.
Demostraremos el siguiente teorema: (**Para el curso 2108 No va la demostración del siguiente teorema**)

Proposición 14. *Si Γ_0 y Γ_1 son caminos homotópicos en Ω, entonces*

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(a) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(a) \qquad \forall a \notin \Omega.$$

como la relación "γ_0 es homotópico a γ_1 es una relación de equivalencia, se tienen las siguientes consecuencias:

Corolario 31. *Si Ω es simplemente conexo entonces*

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_0}(a) = \mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(a) = 0 \qquad \text{para dos caminos cualesquiera en } \Omega \text{ y } a \notin \Omega.$$

La prueba del corolario queda como ejercicio, para la prueba de la proposición 14 será necesario el siguiente:

Lema 3. Sean γ_0 y γ_1 caminos cerrados definidos en $[0,1]$ tales que para un $\alpha \in C$ dado se cumple: $|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|$ $\forall s \in [0,1]$ entonces

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

Demostración. Nótese en primer lugar que la hipótesis del lema implica que $\alpha \notin \gamma_0^*$, $\alpha \notin \gamma_1^*$. Luego se puede definir un nuevo camino

$$\gamma = \frac{\gamma_1 - \alpha}{\gamma_0 - \alpha}.$$

Entonces derivando:

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - \alpha} - \frac{\gamma_0'}{\gamma_0 - \alpha} \tag{19}$$

Además por la hipótesis del lema

$$|1-\gamma| = \left|\frac{\gamma_0-\gamma_1}{\gamma_0-\alpha}\right| < 1$$

de donde se deduce que $\gamma(s) \in D(1,1)$ $\forall s \in [0,1]$. Luego $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = 0$; pero ahora, por la formula 19 $\mathrm{Ind}_\gamma(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha)$, lo que demuestra el lema

Demostración. de la proposición 14: Como $H(s,t) \in \Omega$ $\forall s,t \in [0,1]$ y $a \notin \Omega$, existe ε tal que $|H(s,t)-a| > 2\varepsilon$, ya que $H([0,1]\times[0,1])$ es un compacto contenido en Ω. Por otro lado como H es uniformemente continua, existe $n > 0$ tal que

$$|H(s,t) - H(s^{'},t^{'})| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |s-s^{'}| + |t-t^{'}| \leq \frac{1}{n}$$

defina caminos cerrados γ_k, $0 \leq k \leq n$ por:

$$\gamma_k(s) = H(\frac{i}{n},\frac{k}{n})(ns+1-i) + H(\frac{i-1}{n},\frac{k}{n})(i-ns), \quad s \in [\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}], \quad i = 1,..,n$$

Esto significa los siguiente: de las curvas $s \to H(s,t)$ elegimos $n+1$ que son $s \to H(s,k/n)$, $k = 0,\cdots,n$ y cada una de ellas las transformamos en poligonales

$$\begin{aligned}|\gamma_k(s) - H(s,\tfrac{k}{n})| = &\ |H(\tfrac{i}{n},\tfrac{k}{n})(ns+1-i) + H(\tfrac{i-1}{n},\tfrac{k}{n})(i-ns) - H(s,\tfrac{k}{n})\\ \leq &\ H(\tfrac{i}{n},\tfrac{k}{n}) - H(s,\tfrac{k}{n})||ns+1-i| + |H(\tfrac{i-1}{n},\tfrac{k}{n}) - H(s,\tfrac{k}{n})|i-ns| \leq \varepsilon\end{aligned}$$

En particular, tomando $k=0$ y $k=n$,

$$|\gamma_0(s) - \Gamma_0(s)| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |\gamma_n(s) - \Gamma_1(s)| < \varepsilon$$

Además, usando 1 y que $|H(s,t)-\alpha| > 2\epsilon$, se tiene $|\alpha - \gamma_k(s)| > \varepsilon$, $\forall k = 0,..,n$, $0 \leq s \leq 1$.
Ahora aplicamos $n+2$ el lema para obtener que el índice de a con respecto a cada γ_i es el mismo.

Observación 6. Podríamos haber definido simplemente $\gamma_k = H(s,k/n)$ pero de la curva $s \to H(s,k/n)$ sólo sabemos que es continua, y para definir el índice se precisa que sea continuamente diferenciable a trozos; por eso las transformamos en poligonales. □

2. Teorema de Cauchy global.

Definición 21. Un ciclo es una unión finita de caminos cerrados. Si $\gamma_1,...,\gamma_n$ son caminos cerrados y $\Gamma = \{\gamma_1,...,\gamma_n\}$ entonces se define

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} f(z)dz$$

donde f es una función continua definida en $\Gamma^* = \gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$.
El índice de un ciclo Γ respecto de un punto $a \notin \Gamma^*$ se define como

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}$$

obviamente:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_i}(a)$$

y por lo tanto, $\operatorname{Ind}_\Gamma(a)$ es una función continua en $C\backslash\Gamma^*$ que solo toma valores enteros y vale cero en la componente no acotada de $C\backslash\Gamma^*$.
Notación: $\Gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$.

Teorema 32. **Teorema de Cauchy global.** *Sea Ω un abierto cualquiera de C, y $f \in H(\Omega)$. Sea Γ un ciclo en Ω tal que* $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ *para todo $a \notin \Omega$. Entonces para todo $z \in \Omega\backslash\Gamma^*$ se cumple:*

$$i) \qquad f(z).\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw$$

y también

$$ii) \qquad \int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Demostración. Sea $g : \Omega \times \Omega \to C$ definida por:

$$g(z,w) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(w)}{z-w} & \text{si } z \neq w \\ \\ f'(z) & \text{si } z = w. \end{cases}$$

Como sabemos g es continua en $\Omega \times \Omega$, y por lo tanto se puede definir, para $z \in \Omega$:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)dw.$$

La parte $i)$ de la tesis equivale a probar que si $z \in \Gamma^*$, entonces $h(z) = 0$.
Afirmación: $h \in H(\Omega)$.
Mostramos primero que h es continua en Ω. En efecto, si $z_n \to z$ con $z_n, z \in \Omega$, entonces $g(z_n, w)$ converge a $g(z,w)$ uniformemente para $w \in \Gamma^*$(esto último se cumple porque Γ es un conjunto compacto). Se deduce que $h(z_n) \to h(z)$ puesto que la convergencia es uniforme permite intercambiar lím con $\int$. Esto prueba que h es continua. Sea Δ un triángulo cerrado en Ω. Entonces, usando el Teorema de Fubini se tiene que:

$$\int_{\partial\Delta} h(z)dz = \int_{\partial\Delta}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)dw\right)dz = \int_\Gamma\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta} g(z,w)dz\right)dw$$

Como la función $z \to g(z,w)$ es holomorfa (la singularidad es evitable en $z = w$) para cada $w \in \Omega$, se deduce que $\forall w \in \Omega$ $\int_{\partial\Delta} g(z,w)dz = 0$. Luego $\int_{\partial\Delta} h(z)dz = 0$ y por el Teorema de Morera, $h \in H(\Omega)$. Esto prueba la afirmación.
Defina ahora Ω_1, como el conjunto de puntos z tales que $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0$ y la función $h_1 : \Omega_1 \to C$ como:

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)dw}{w-z}$$

No es difícil probar que $h_1'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)dw}{(w-z)^2}$ y que por lo tanto $h_1 \in H(\Omega_1)$.
Si $z \in \Omega \cap \Omega_1$ $h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw = h_1(z) + \operatorname{Ind}_\Gamma(z)f(z) = h_1(z)$ Entonces en $\Omega \cap \Omega_1$ se cumple $h(z) = h_1(z)$ de donde podemos definir una función

$$\varphi(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega \\ h_1(z) & \text{si } z \in \Omega_1 \end{cases}$$

Observe también que $\Omega \cup \Omega_1 = C$ puesto que, por hipótesis, $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Se deduce que $\varphi \in H(C)$, o sea, es una función entera. Pero

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} h_1(z) = 0,$$

luego φ está acotada y por el Teorema de Liouville φ es constante, o sea $\varphi \equiv 0$. En particular $h(z) = 0$, lo que prueba (i).
Para probar $ii)$ sea a $a \in \Omega\backslash\Gamma^*$ y defina $F(z) = (z-a)f(z)$. Entonces, aplicando i) a la función F se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(z)}{z-a}dz = F(a).\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0 \text{ (porque } F(a) = 0).$$

$\square$

Observaciones importantes:
i) Este teorema generaliza la primera versión del Teorema de Cauchy puesto que si Ω es convexo obviamente $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$.
ii) Si Ω es simplemente conexo, se cumple $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$ y por lo tanto si $\Gamma \subset \Omega$ es un ciclo y $f \in H(\Omega)$ se cumple que $\int_\Gamma f(z)dz = 0$.
iii) Si γ_0 y γ_1 son dos caminos cerrado en Ω homotópicos (Ω NO necesariamente simplemente conexo), entonces el ciclo $\Gamma = \gamma_0 \cup -\gamma_1$ cumple que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$. Por lo tanto, si $f \in H(\Omega)$ se cumple que $\int_\Gamma f(z)dz = 0$. Lo que implica que $\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz$.

Capítulo 6

Funciones Meroformas

1. Teorema de Residuos

Definición 22. Una función f es meromorfa en un abierto Ω si existe un subconjunto $A \subset \Omega$ tal que:
i) A no tiene puntos de acumulación en Ω.
ii) $f \in H(\Omega \backslash A)$.
iii) Los puntos de A son polos de f.

En particular, podría ser $A = \phi$ y entonces f sería holomorfa en Ω.

Ejemplo.
Sea la función

$$f(z) = \frac{1}{sen(\frac{1}{z})}$$

1. Probar que f no es meromorfa en $\mathbb{C}$
2. Probar que f es meromorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. f no es meromorfa en $\mathbb{C}$ ya que hay una singularidad no aislada en $z = 0$.
2. f si es meromorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ya que existe $A \subset \Omega$,

$$A = \{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}\} \text{ tal que:}$$

   a) A no acumula en Ω. Pues A como subconjunto de $\mathbb{C}$ acumula en $z = 0$ pero $0 \notin \Omega$.
   b) $f \in H(\Omega \setminus A)$
   c) Los puntos de A son polos de f ya que:

$$\lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \frac{1}{sen(\frac{1}{z})} = \infty$$

   y por supuesto, son singularidades aisladas, entonces son polos. $\square$

Recordamos que si f tiene un polo en a, entonces existen constantes $C_1(a), .., C_m(a)$, $(C_m \neq 0)$ tales que

$$g(z) = f(z) - \left(\frac{C_1(a)}{z-a} + \frac{C_2(a)}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{C_m(a)}{(z-a)^m} \right)$$

tiene una singularidad evitable en a. $Q(z) = \frac{C_1(a)}{z-a} + \frac{C_2(a)}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{C_m(a)}{(z-a)^m}$ es llamado la parte principal asociado al polo a.

Si Γ es el borde de un pequeño disco que solo contiene esta singularidad de f, entonces, por el Teorema de Cauchy se tiene que

$$0 = \int_\Gamma g(z)dz.$$

De donde se deduce que

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i C_1(a).\mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$

$C_1(a)$ se llama **residuo** de f en a y se denota por $Res(f,a)$.

El siguiente teorema generaliza este resultado.

Teorema 33. **Teorema de los residuos.** *Sea f meromorfa en Ω, $f \in H(\Omega\backslash A)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega\backslash A$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0\ \forall a \notin \Omega$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a\in A} C_1(a)\mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$

Demostración. del teorema: Como $\Gamma^* \subset \Omega$, se tiene que el conjunto de puntos $\xi \in \Omega$ tales que $\mathrm{Ind}_\Gamma(\xi) \neq 0$ es un subconjunto acotado contenido en Ω y cuya clausura está contenida en Ω. Se deduce que este conjunto sólo puede contener finitos puntos de A puesto que si hubiera infinitos encontraríamos un punto de acumulación de A en Ω, contradiciendo la condición $i)$ de la definición de meromorfa. Sea $a_1,...,a_n$ los puntos de A para los cuales $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0$ y sean $Q_1,...,Q_n$ las partes principales asociadas a los polos $a_1,...,a_n$. Sea $g = f-(Q_1+\cdots+Q_n)$, las singularidades que g posee en $a_1,...,a_n$ son evitables. Se deduce que $g \in H(\Omega\backslash(A\backslash\{a_1,...,a_n\}))$ y podemos aplicar el Teorema de Cauchy global para concluir que $\int_\Gamma g(z)dz = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)dz &= \int_\Gamma (Q_1(z)+\cdots+Q_n(z))dz\\ &= 2\pi i\mathrm{Ind}_\Gamma(a_1)C_1(a_1)+\cdots+2\pi i\mathrm{Ind}_\Gamma(a_n)C_1(a_n).\end{aligned}$$

2. Cálculo del orden del polo y del residuo.

Para aplicar este último necesitamos poder calcular el número $C_1(a)$ para cada polo de f. A continuación vamos a dar un método para calcularlo.

Sabemos de la Proposición 12 que si f tiene un polo de orden m en $z=a$, entonces existe $r>0$ con $D(a,r)\subset\Omega$ y $h \in H(D(a,r))$ tales que:

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \text{ donde } h(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in D(a,r).$$

De esto último deducimos que

$$\lim_{z\to a}(z-a)^n f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)^n\frac{h(z)}{(z-a)^m} = \begin{cases} 0 & si \quad n>m, \\ h(a)\neq 0 & si \quad n=m \\ \infty & si \quad n<m. \end{cases}$$

Por lo tanto, para hallar el orden de un polo, basta con encontrar un número natural m tal que

$$\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z) \text{ sea distinto de cero y de infinito.}$$

Ahora que sabemos calcular el orden del polo, nos falta calcular $C_1(a)$.

Como f tiene un polo de orden m en $z=a$, entonces la función $g(z)=f(z)-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_k}{(z-a)^k}$ tiene singularidad evitable en a. Entonces g se extiende a una función holomorfa. Llamaremos G a la extensión holomorfa de g. Luego

$$f(z)=G(z)+\frac{c_1}{z-a}+\cdots+\frac{c_m}{(z-a)^m}.$$

Multiplicando por $(z-a)^m$ a ambos miembros, se obtiene

$$(z-a)^m f(z)=(z-a)^m G(z)+c_1(z-a)^{m-1}+c_2(z-a)^{m-2}\cdots+c_m.$$

Derivando $m-1$ veces ambos miembros, tenemos

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[(z-a)^m G(z)\right]+(m-1)!c_1.$$

No es difíl probar que $\lim_{z\to a}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[(z-a)^m G(z)\right]=0$, por lo tanto se tiene que

$$\lim_{z\to a}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=(m-1)!c_1.$$

Despejando

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\left[(z-a)^m f(z)\right]=c_1. \tag{20}$$

Ejemplo.

Sea $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$. Es claro que $z=i$ y $z=-i$ son polos. $z=i$ es un polo de orden dos ya que

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^2}=\frac{1}{(2i)^2}\neq 0.$$

Usando (20) y que $m=2$, se tiene que

$$c_1(i)=\lim_{z\to i}\frac{\partial}{\partial z}\left[(z-i)^2 f(z)\right]=\lim_{z\to i}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(z+i)^2}=\lim_{z\to i}\frac{-2}{(z+i)^3}=\frac{-2}{(2i)^3}.$$

Ejemplo.

Sea $S_R(t)=Re^{it}$ con $t\in[0,\pi/2]$ y γ la curva S_R compuesta con los segmentos $[0,R]$ y $[Ri,0]$ orientada en forma antihorario.

1. Calcular $\int_\gamma \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}dz$.
2. Probar que $|e^{iz^2}|\leq 1$ para todo z en el primer cuadrante y deducir que
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R}\frac{e^{iz^2}}{1+z^4}dz=0.$$
3. Calcular $\int_0^{+\infty}\frac{cos(t^2)-sen(t^2)}{1+t^4}dt$.

Consideramos la función $f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$. Entonces los polos de f son los puntos

$$\sqrt[4]{-1} = \{e^{\frac{\pi}{4}i}, e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2})i}, e^{(\frac{\pi}{4}+\pi)i}, e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2})i}\}$$

Claramente el único polo en el interior de la curva γ es $e^{\frac{\pi}{4}i}$. Por lo tanto, por el Teorema 33, se tiene que $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(e^{\frac{\pi}{4}i})$. Como todos los polos de f son simple, entonces por (20)

$$Res(e^{\frac{\pi}{4}i}) = \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} (z - e^{\frac{\pi}{4}i})\frac{e^{iz^2}}{1+z^4} =$$

$$e^{i(e^{\frac{\pi}{4}i})^2} \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{z-e^{\frac{\pi}{4}i}}{1+z^4} = e^{i(e^{\frac{\pi}{4}i})^2} \lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{1}{4z^3} = e^{i(e^{\frac{\pi}{4}i})^2} \frac{1}{4(e^{\frac{\pi}{4}i})^3} = \alpha.$$

2. Sea $z = x+iy$, entonces $|e^{iz^2}| = |e^{i(x^2-y^2+2xyi)}| = e^{-2xy}$. Como $x \geq 0$ y $y \geq 0$, se tiene que $e^{-2xy} \leq 1$.

$$\left|\int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}dz\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\frac{e^{i(Re^{it})^2}}{1+(Re^{it})^4}Re^{it}i\right| dz \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R}{R^4-1}dz =$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R}{R^4-1} \to 0 \text{ cuando } R\to+\infty.$$

3. Tenemos que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[0,R]} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz + \int_{[Ri,0]} f(z)dz = 2\pi i\alpha.$$

Parametrizando el segmento $[0,R]$ con $\beta_1(t) = t$ con $0 \leq t \leq R$ se tiene que

$$\int_{[0,R]} f(z)dz = \int_0^R \frac{e^{it^2}}{1+t^4} = \int_0^R \frac{cos(t^2)+isen(t^2)}{1+t^4}$$

Parametrizando el segmento $[0,Ri]$ con $\beta_2(t) = it$ con $0 \leq t \leq R$ se tiene que

$$\int_{[Ri,0]} f(z)dz = -\int_{[0,Ri]} f(z)dz = -i\int_0^R \frac{e^{i-t^2}}{1+t^4} = -i\int_0^R \frac{cos(t^2)-isen(t^2)}{1+t^4} = \int_0^R \frac{-sen(t^2)-icos(t^2)}{1+t^4}$$

Luego, la parte tomando parte real se tiene que

$$Re\left(\int_{[0,R]} f(z)dz + \int_{[Ri,0]} f(z)dz\right) = \int_0^R \frac{cos(t^2)-sen(t^2)}{1+t^4}$$

Luego tomando limite cuando $R\to+\infty$, tenemos que

$$Re\left(\lim_{R\to+\infty}\int_\gamma \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{cos(t^2)-sen(t^2)}{1+t^4} = Re(2\pi i\alpha).$$

3. Principio del Argumento

3.1. Principio del argumento para funciones holomorfas. Recordemos que para toda función $f \in H(\Omega)$, no nula, que tiene un cero en $a \in \Omega$, existen $m \in \mathbb{N}$, un disco $D(a,r) \subset \Omega$ y una función $h \in H(D(a,r))$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m h(z) \text{ con } h(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in D(a,r).$$

El natural m es llamado el orden del cero de f en $z = a$.

TEOREMA 34. **Principio del argumento para funciones holomorfas.** *Sea γ un camino cerrado en un abierto conexo Ω, tal que* $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. *Supongamos que* $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ *solo puede tomar valores 0 y 1 y sea* $\Omega_1 = \{a \in \Omega : \ \mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1\}$. *Sea $f \in H(\Omega)$, f no nula, y N_f el número de ceros de f en Ω_1 contando su multiplicidades. Si f no tiene ceros en γ^* entonces*

$$N_f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

DEMOSTRACIÓN. Primero, vamos a probar que si f tiene un cero de orden m en $z = a$, entonces la función $\varphi = f^{'}/f$, tiene un polo en $z = a$ y $C_1(a) = m$.
Si m es el orden del cero de f en a, entonces existe un disco $D(a,r) \subset \Omega$ y una función $h \in H(D(a,r))$ tal que

$$f(z) = (z-a)^m h(z) \text{ con } h(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in D(a,r).$$

Como $f^{'}(z) = m(z-a)^{m-1}h(z) + (z-a)^m h^{'}(z)$, obtenemos que

$$\varphi(z) = \frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{m}{z-a} + \frac{h^{'}(z)}{h(z)}.$$

Luego como $h(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$, se tiene que la función $h^{'}/h$ es holomorfa. De esto último se deduce que $C_1(a) = Res(\varphi, a) = m$.
Por otro lado, es claro que si φ tiene un polo en $z = a$, entonces f tiene un cero en $z = a$. Por lo tanto, $a \in \Omega$ es un cero de f si y solo si es un polo de φ. Como los ceros de f no pueden acumular en Ω, entonces los polos de φ no pueden acumular en Ω. Esto muestra que φ es una función meromorfa en Ω.
Aplicando el Teorema de los residuos, vemos que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz = \sum_{a\in \text{ polo de } \varphi} \mathrm{Ind}_\gamma(a) Res(\varphi; a)$$

pero a es un polo de φ si y solo si $f(a) = 0$ y en este caso, si notamos por m_a el orden del cero en a, el residuo es m_a:
Esto prueba entonces que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}(z)dz = \sum_{a\in \text{ cero de } f} m_a = N_f.$$

Además si el intervalo de definición de γ es $[0, 2\pi]$:

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f^{'}(\gamma(s)).\gamma^{'}(s)}{f(\gamma(s))}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz.$$

□

Ejemplo.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y f tal que

$$f(z) = \frac{z^{n-1}}{z^n + a^n}.$$

1. Probar que f es meromorfa en $\mathbb{C}$.
2. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = Re^{it}$ con $R \neq |a|$. Probar que

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & si \quad R < |a|, \\ \\ 2\pi i & si \quad R > |a|. \end{cases}$$

Parte 1). Para los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n + a^n \neq 0$, f es holomorfa ya que es cociente de funciones holomorfas. Si z_0 es tal que $z_0^n + a^n = 0$, entonces $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Lo que implica que z_0 es un polo.

Parte 2). Si consideramos $h(z) = z^n + a^n$ se tiene que $h^{'}(z) = nz^{n-1}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h^{'}(z)}{h(z)}dz = \frac{1}{n}N_h,$$

donde N_h es la cantidad de ceros de h en el interior de γ. Como $N_h = 0$ si $R < |a|$ y $N_h = n$ si $R > |a|$, se concluye que

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & si \quad R < |a|, \\ \\ 2\pi i & si \quad R > |a|. \end{cases}$$

Teorema 35. **Principio del argumento para funciones meroformas.** *Sea γ un camino cerrado en un abierto conexo Ω, tal que* $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, *$\forall a \notin \Omega$. Supongamos que* $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ *solo puede tomar valores 0 y 1 y sea $\Omega_1 = \{a \in \Omega :$* $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1\}$. *Sea f una función meromorfa en Ω, f no nula, N_f el número de ceros de f en Ω_1 contando su multiplicidades y P_f el número de polos en Ω_1. Si f no tiene ceros ni polos en γ^* entonces*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz = N_f - P_f = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

Demostración. Primero, vamos a probar que si f tiene un polo de orden m en $z = a$, entonces la función $\varphi = f^{'}/f$, tiene un polo en $z = a$ y $C_1(a) = -m$.
Si m es el orden del polo de f en a, entonces existe un disco $D(a, r) \subset \Omega$ y una función $h \in H(D(a, r))$ tal que

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m} \text{ con } h(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in D(a, r).$$

Como

$$f^{'}(z) = \frac{h^{'}(z)(z-a)^m + m(z-a)^{m-1}h(z)}{(z-a)^{2m}},$$

obtenemos que

$$\varphi(z) = \frac{f^{'}(z)}{f(z)} = \frac{h^{'}(z)}{h(z)} + \frac{-m}{z-a}.$$

Luego como $h(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,r)$, se tiene que la función $h^{'}/h$ es holomorfa. De esto último se deduce que $C_1(a) = Res(\varphi, a) = -m$.

Por otro lado, es claro que si φ tiene un polo en $z = a$, entonces f tiene un cero o un polo en $z = a$. Por lo tanto, $a \in \Omega$ es un polo de φ si y solo si a es un cero o un polo de f. Como los ceros y los polos de f no pueden acumular en Ω, entonces los polos de φ no pueden acumular en Ω. Esto muestra que φ es una función meromorfa en Ω.

Aplicando el teorema de los residuos, vemos que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz = \sum_{a\in \text{ polo de } \varphi} \mathrm{Ind}_\gamma(a) Res(\varphi; a) =$$

$$\sum_{a\in \text{ ceros de } f} \mathrm{Ind}_\gamma(a) Res(\varphi; a) + \sum_{a\in \text{ polo de } f} \mathrm{Ind}_\gamma(a) Res(\varphi; a) = N_f - P_f.$$

Además si el intervalo de definición de γ es $[0, 2\pi]$:

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f^{'}(\gamma(s)).\gamma^{'}(s)}{f(\gamma(s))}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}dz.$$

□

Para probar el siguiente resultado, recordamos que (Lema 3) si

Sean γ_0 y γ_1 caminos cerrados definidos en $[0,1]$ tales que para un $\alpha \in C$ dado se cumple: $|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|$ $\forall s \in [0,1]$ entonces

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(\alpha)$$

Proposición 15. **Teorema de Rouché.** *Sea γ un camino cerrado en un abierto conexo Ω, tal que $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos que $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ solo puede tomar valores 0 y 1 y sea $\Omega_1 = \{a \in \Omega : \ \mathrm{Ind}_\gamma(a) = 1\}$. Sea $f \in H(\Omega)$, f no nula, y N_f el número de ceros de f en Ω_1 contando su multiplicidades.*
Si $g \in H(\Omega)$ y $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in \gamma^*$ entonces $N_f = N_g$.

Demostración. Primero observe que la hipótesis implica que g no tiene ceros en γ^*.

Considere $\gamma_1(t) = f(\gamma(t))$ y $\gamma_0(t) = g(\gamma(t))$. Por hipótesis se tiene que

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |\gamma_1(t)| \quad \forall\ t \in [0,1].$$

Luego por el Lema 3 se tiene que

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0). \tag{21}$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 34 se tiene que

$$N_g = \mathrm{Ind}_{g\circ\gamma} = \mathrm{Ind}_{\gamma_0}(0) \overset{(21)}{=} = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma} = N_f.$$

□

Ejemplo 1. Sea α un número real, $\alpha > 1$ y la función

$$f(z) = ze^{\alpha - z} - 1$$

i) Probar que f tiene exactamente un cero en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
ii) Probar que el cero hallado en i) es un número real.

Parte i).Consideramos $F(z) = ze^{\alpha-z}$ y $G(z) = f(z) = ze^{\alpha-z} - 1$. Vamos a probar que $|F(z) - G(z)| < |F(z)|$ para todo $z \in \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Entonces $|F(z) - G(z)| = |1| = 1$ y $|F(z)| = |ze^{\alpha-z}| = |z||e^{\alpha-z}| = |e^{\alpha-z}|$

Si $z = x+iy$, como $|z| = 1$ se tiene que $-1 \leq x \leq 1$, entonces $|e^{\alpha-z}| = e^{\alpha-x} > 1$ ya que $\alpha > 1$. Por lo tanto aplicando el Teorema de Rouché se tiene que el número de ceros de F y $G = f$ son iguales. Como el número de ceros de F es uno entonces el número de ceros de f es uno.
Parte ii) Un simple cálculo muestra que si z_0 es raíz de f entonces $\overline{z_0}$ es raíz de f. Como por la parte i) hay una única raíz, entonces $z_0 = \overline{z_0}$. Lo que implica que z_0 es un número real.

Ejemplo 2.
Sea $R \in \mathbb{R}$ con $R > 3$ y $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\} \cap \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \geq 0\}$.

1. Probar que la ecuación $(z+1)e^{-z} = 2z-2$ tiene una única solución en D_R.
2. Probar que la ecuación $(z+1)e^{-z} = 2z-2$ tiene una única solución en $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \geq 0\}$.
3. Probar que la solución hallada es un número real.

Parte 1). Vamos a aplicar el Teorema de Rouché con $g(z) = (z+1)e^{-z}-(2z-2)$, $f(z) = -(2z-2)$ y la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_R$ es la de la figura **??**. Por lo tanto $|f(z) - g(z)| = |(z+1)e^{-z}|$ y $|f(z)| = |2z-2| = 2|z-1|$.
Primero consideramos $z \in \gamma_1$ entonces $z = ti$ con $-R \leq t \leq R$. Entonces

$$|f(z) - g(z)| = |(z+1)e^{-z}| = |(ti+1)e^{-ti}| = |ti+1| = \sqrt{t^2+1}.$$

$$|f(z)| = 2|z-1| = 2|ti-1| = 2\sqrt{t^2+1}.$$

Por lo tanto se cumple que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$.

Si consideramos $z \in \gamma_R$ entonces $z = Re^{ti}$ con $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Entonces $|f(z)-g(z)| = |(z+1)e^{-z}| = |(Re^{ti}+1)e^{-Re^{ti}}| = |(Re^{ti}+1)|.|e^{-Re^{ti}}|$.

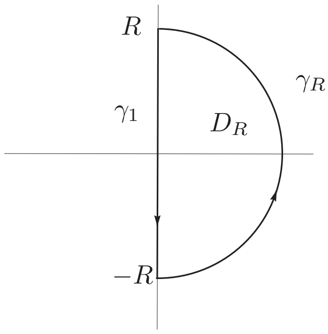
$|e^{-Re^{ti}}| = |e^{-R(cos(t)+isen(t))}| = e^{-R(cos(t)}$. Como $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ se cumple que $cos(t) \geq 0$ y por lo tanto $e^{-R(cos(t)} \leq 1$.
Por otro lado se tiene que $|(Re^{ti}+1)| \leq R+1$.
De donde se deduce que $|f(z) - g(z)| \leq R+1$.

Por otro lado
$|f(z)| = 2|z-1| = 2|(Re^{ti}-1)| \geq 2(R-1)$.

Por lo tanto, para que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ se tiene que cumplir que $R+1 < 2(R-1)$ y esto sucede si $R > 3$.

Parte 2). Supongamos que la ecuación tiene dos soluciones z_1 y z_2 en $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : \ x \geq 0\}$. Consideramos $R > 0$ tal que $R > |z_1|$ y $R > |z_2|$. Entonces $z_1, z_2 \in D_R$, lo que contradice la parte 1).
Parte 3). Es fácil probar que si z es solución entonces $\overline{z}$ es solución. Luego por la parte 1), se tiene que $z = \overline{z}$, lo que implica que z es real.

Figura 1.



(a)

4. Cálculo de Integrales

A continuación enunciamos un par de lemas, llamados lemas de deformación de caminos, que serán de muchas ayuda para el cálculo de integrales.

Lema 4. Sea Ω un abierto que contiene a $\{z \in \mathbb{C} : \ arg(z) \in [\theta_1, \theta_2]\}$, donde $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$, $\gamma_R : [\theta_1, \theta_2] \to \mathbb{C}$ con $\gamma_R(t) = Re^{it}$ y f continua en Ω.

1. Si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ entonces $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z) = 0$.
2. Si $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ entonces $\lim_{R\to 0} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Demostración de la parte 1.

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{it})iRe^{it}dt\right| \leq | \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|f(Re^{it})iRe^{it}\right| dt =$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|f(Re^{it})Re^{it}\right| dt$$

Por hipótesis se tiene que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, esto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que si $|z| > R_0$ se tiene que $|zf(z)| < \varepsilon$.
Usando esto último se tiene que si $R > R_0$ y $z = Re^{it}$ entonces $|z| > R_0$ por lo tanto

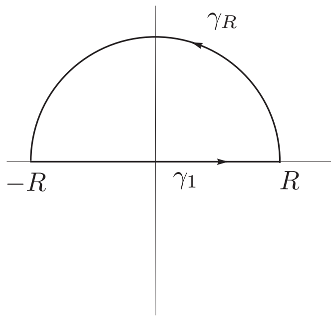
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \left|f(Re^{it})Re^{it}\right| dt \leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varepsilon dt = \varepsilon(\theta_2 - \theta_1).$$

Lo que prueba que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Lema 5. **Lema de Jordan**.

Ejemplo. Calcular
$$\int_0^{+\infty} \frac{cos(x)dx}{x^2+4}\cdot$$

FIGURA 2.



(a)

Para cada $R \in \mathbb{R}$ con $R > 2$, consideramos la curva $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_R$ (mirar la figura **??**) y la función $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+4}\cdot$ El polo a considerar es $z = 2i$, que es un polo de orden 1. Por lo tanto
$$Res(f, 2i) = \lim_{z\to 2i} (z-2i)\frac{e^{iz}}{z^2+4} = e^{-2} \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{z^2+4} = \frac{e^{-2}}{4i}\cdot$$

Por lo tanto $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{e^{-2}}{4i}\cdot$
Por el lema de Jordan se tiene que $\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.
Parametrizando $\gamma_1(t) = t$ con $-R \le t \le R$ se tiene que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{e^{it}}{t^2+4}dt$.
Por lo tanto
$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2+4}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(t)+isen(t)}{t^2+4} = \frac{e^{-2}}{4i}\cdot$$
Por lo tanto $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2+4} = \frac{e^{-2}\pi}{2}\cdot$ Como $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2+4} = 2\int_0^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2+4}$, entonces $\int_0^{+\infty} \frac{cos(t)}{t^2+4} = \frac{e^{-2}\pi}{4}\cdot$

5. Series de Laurent

Dados $z_0 \in \mathbb{C}$ y números reales r y R con $0 < r < R$ definimos el anillo de centro z_0 y radios r y R como
$$A_{r,R}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : \; r < |z-z_0| < R\}.$$
Decimos que una serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente si las series $\sum_{-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n$, $\sum_0^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ convergen uniformemente.

TEOREMA 36. *Teorema de Laurent Sea $f \in H(A_{r,R}(z_0))$, existe una única sucesión de número complejos $\{c_n\}$ tal que:*

1. *$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ para todo $z\in A_{r,R}(z_0)$.*
2. *Para cualquier par de números $r^{'}$ y $R^{'}$ con $0r<r^{'}<R^{'}<R$ se cumple que la serie $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente y por lo tanto para cualquier camino cerrado γ con $\gamma\subset A_{r',R'}(z_0)$ se tiene que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{c_n}{2\pi i}\int_\gamma (z-z_0)^n dz=c_{-1}Ind_\gamma(z_0).$$

Demostración. Sean $r^{'}$ y $R^{'}$ con $0r<r^{'}<R^{'}<R$ y las curvas $\gamma_1(t)=R^{'}e^{it}$ y $\gamma_2(t)=r^{'}e^{it}$ con $t\in[0,2\pi]$. Consideramos el ciclo $\Gamma=\gamma_1-\gamma_2$. Entonces para cualquier $z\in A_{r',R'}(z_0)$, por el Teorema global de Cuachy se tiene que

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw\cdot$$

Si $w\in\gamma_1$ y $z\in A_{r',R'}(z_0)$ se cumple que $|w-z_0|>|z-z_0|$ por lo tanto $\left|\frac{z-z_0}{w-z_0}\right|<1$, de donde se deduce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n=\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}=\frac{w-z_0}{w-z}\cdot$$

De donde se deduce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n=\frac{1}{w-z}\cdot$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw\cdot$$

Por lo cual tenemos que

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw \text{ para } n\geq 0.$$

por otro lado, si $w\in\gamma_2$ y $z\in A_{r',R'}(z_0)$ se cumple que $|z-z_0|>|w-z_0|$ por lo tanto $\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right|<1$, de donde se deduce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n=\frac{1}{1-\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)}=\frac{z-z_0}{z-w}\cdot$$

De donde se deduce que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n=\frac{1}{z-w}\cdot$$

Por lo tanto

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f(w)}{w-z}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{w-z_0}\left(\frac{z-z_0}{w-z_0}\right)^n dw =$$

$\square$

Ejemplo. Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m > 0$ y $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = z^m e^{\frac{1}{z}}.$$

1. Clasificar la singularidad de f.
2. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = e^{it}$. Calcular $\int_\gamma f(z)dz$.

Parte 1. Para clasificar la singularidad calculamos el $\lim_{z\to 0} z^m e^{\frac{1}{z}}$. Si $z = x + iy$, tomamos la restricción $y = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} x^m e^{\frac{1}{x}} = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^-} x^m e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

De esto último se tiene que $\lim_{z\to 0} z^m e^{\frac{1}{z}}$ no existe y por lo tanto $z = 0$ es una singularidad esencial.

Parte 2. Como $e^z = 1 + z + \cdots \frac{z^n}{n!} \cdots$ se tiene que $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{z^n n!} \cdots$. De donde se deduce que

$$z^m e^{\frac{1}{z}} = z^m(1 + \frac{1}{z} + \cdots \frac{1}{z^n n!} \cdots) = z^m + z^{m-1} + \cdots \frac{z^{m-n}}{n!} \cdots .$$

Por lo tanto todos los términos del desarrollo de Laurent de $z^m e^{\frac{1}{z}}$ tienen primitiva excepto cuando $m - n = -1$ o sea cuando $n = m + 1$. Como hay convergencia uniforme podemos intercambiar la serie con el integral. Entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^m e^{\frac{1}{z}} dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z^m + z^{m-1} + \cdots \frac{z^{m-n}}{n!} \cdots)dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^m dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^{m-1}dz + \cdots \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{m-n}}{n!}dz \cdots = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z(m+1)!}dz =$$

$$\frac{1}{(m+1)!} Ind_\gamma(0) = \frac{1}{(m+1)!}.$$