



ALN – Multifrontales

In. Co.

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Método frontal

- Variante de los métodos de factorización
 - Trabaja de a bloques.
 - Presentado por Irons en años 70.
- Basado en la necesidad de resolución de grandes matrices simétricas y definidas positivas resultantes de la aplicación del método de los elementos finitos a problemas de análisis estructural.

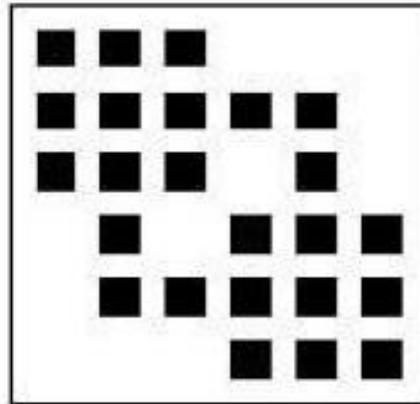
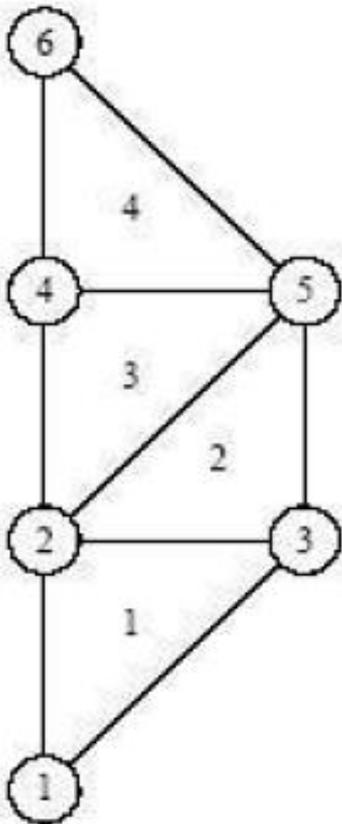
Método frontal

- Inspirado en la metodología de trabajo de los MEF.
- Se puede observar la relación existente entre la forma de construcción de la matriz de rigidez global por los MEF a través del ensamblaje de las matrices de rigidez de cada elemento según

$$A = \sum_e B_e$$

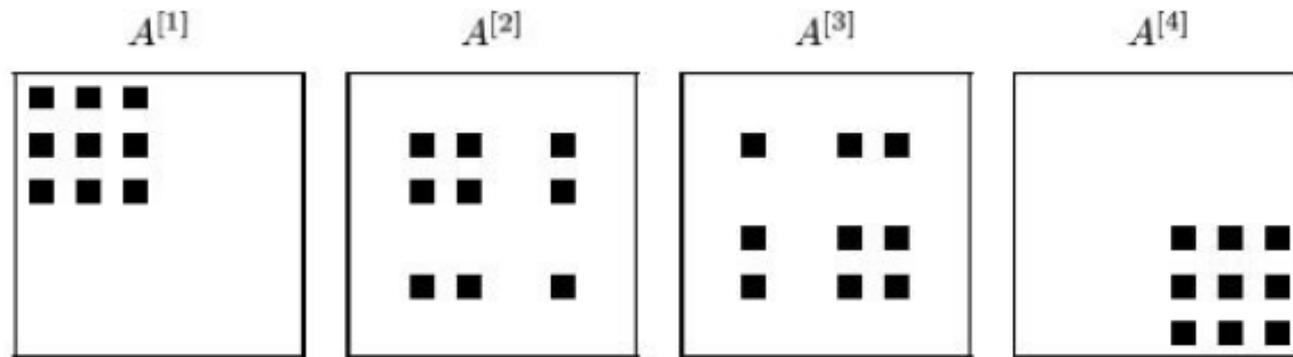
(en donde B_e son las matrices de rigidez de los distintos elementos y A es la matriz de rigidez global) y la evolución de la factorización por la estrategia frontal.

Método frontal



- La discretización de un problema utilizando MEF y la estructura (coeficientes no nulos) de la matriz de rigidez asociada al problema.
- En el ejemplo se utilizan 4 elementos triangulares de 3 nodos cada uno y una sola variable libre lo que implica que la matriz de rigidez global posea 6 ecuaciones

Método frontal



- Se puede observar la estructura de cada una de las matrices de rigidez asociadas a cada uno de los 4 elementos del problema planteado en la Figura anterior.

Método frontal

- El principal aporte realizado por Irons, es la observación de que no es necesario calcular toda la matriz de rigidez global para luego factorizarla.
- Se puede realizar una secuencia de factorizaciones, a medida que las submatrices (matrices de rigidez de cada elemento) se encuentren completas, es decir que se puede factorizar una fila y columna una vez que ésta haya recibido todos los aportes.

Método frontal

- 1: Calcular los coeficientes que aportan los elementos mientras se puedan agregar a la matriz frontal.
- 2: Buscar en la matriz frontal, dentro de las filas/columnas que se encuentran completamente sumadas (aquellas que no recibirían más aportes) un pivot.
- 3: Se elimina el pivot.
- 4: Mientras se puedan eliminar pivot se repiten los pasos 2 y 3.
- 5: Luego se agregan los coeficientes de la matriz del siguiente elemento a la matriz frontal y se repiten los pasos 2 y 3.
- 6: Cuando se eliminan todos los pivot se resuelve mediante sustitución.



Ejemplo

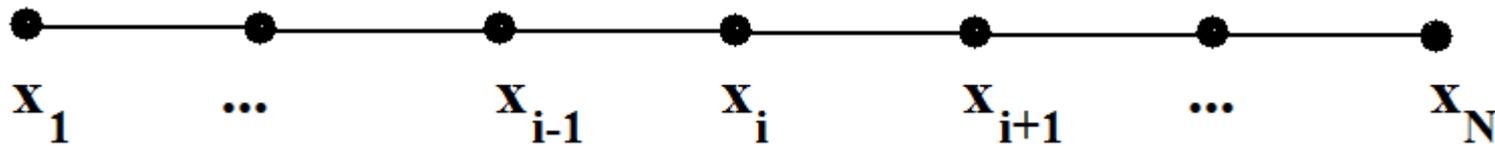
- Solución Frontal de problema tridiagonal

Ejemplo de problema simple en 1D

Encontrar una distribución de temperatura $R \ni x \mapsto u(x) \in R$ tal que:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \text{ for } x \in [0, 1] \quad u(0) = 0 \quad u(1) = 20$$

Discretización por diferencias finitas:



$$u_0 = 0$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0 \text{ for } i = 1, \dots, N - 1$$

$$u_N = 20$$

$$h = \frac{1}{N}$$

$$u_i = u(x_i) = u\left(\frac{i}{N}\right)$$

$$[0, 1] = \bigcup_{i=1}^N [x_{i-1}, x_i]$$

Matriz tridiagonal del problema 1D

$$u_0 = 0$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0 \text{ for } i = 1, \dots, N - 1$$

$$u_N = 20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

La matriz Frontal tiene la información necesaria para eliminar la primera fila

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

$$F2 = F2 - 1/h^2 * F1$$

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2}
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

$$F2 = F2 - 1/h^2 * F1$$

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2}
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

Ya se eliminó la primera fila.

Ahora la matriz Frontral tiene la información necesaria para eliminar la segunda fila

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2}
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

$$F3 = F3 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F2$$

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{3}{2h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & -\frac{3}{2h^2} & \frac{1}{h^2}
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

$$F3 = F3 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F2$$

Solver Frontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{3}{2h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_{N-1} \\
 x_N
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\
 0 & -\frac{3}{2h^2} & \frac{1}{h^2}
 \end{bmatrix}$$

Matriz Frontal

$$F3 = F3 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F2$$

Al final del proceso se obtiene una matriz triangular superior...

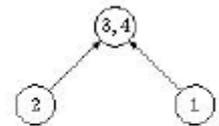
Método multifrontal

- Extensión a los métodos frontales por Duff y Reid.
- El gran aporte de los métodos multifrontales es que están diseñados para trabajar con varios frentes en forma independiente, calculando la factorización de un frente y guardando los aportes del mismo a otros frentes hasta que sea necesario utilizarlos.
- En una etapa previa se realiza el análisis de la dependencia de datos entre los distintos frentes. Una vez establecido el orden de eliminación (árbol de eliminación) se van resolviendo los distintos frentes. Antes de factorizar un frente es necesario ensamblar las matrices de rigidez de los elementos del frente y actualizarlas con el aporte de los frentes ya resueltos.

Método multifrontal

- En forma de ejemplo, se puede ver una matriz A y su árbol de eliminación.
- Para la matriz A la técnica multifrontal factoriza el primer frente definido por la matriz de las entradas 1 y 3, y luego guarda en alguna estructura auxiliar los aportes de este frente ya que el frente 2 no posee dependencias de datos con el primer frente.

$$A = \begin{pmatrix} x & & x & & & \\ & x & & x & & \\ x & & x & & x & \\ & x & & x & & x \end{pmatrix}$$



$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 1 & \begin{pmatrix} x & x \\ x & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 4 \\ 2 & \begin{pmatrix} x & x \\ x & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Método multifrontal

- David y Duff también propusieron una versión de los métodos que combina la estrategia frontal con la multifrontal.
- Posteriormente, los grandes aportes a los métodos multifrontales se han dado en las etapas de ordenamiento y factorización simbólica.
- También se han presentado varios trabajos para explotar características de las distintas arquitecturas de computadores, hacer un uso eficiente de las distintas memorias y principalmente en aplicaciones de estrategias de paralelismo.

Método multifrontal

- Davis y Duff presentan el método multifrontal para matrices no simétricas.
- Su propuesta se basa en la utilización de los DAGs en vez de los árboles de eliminación para representar la factorización.
- Como principales características de la propuesta se destacan el manejo de frentes rectangulares a diferencia del método multifrontal original que utiliza frentes cuadrados y la combinación de la etapa de análisis y factorización numérica.



Ejemplo

- Solución Multifrontal del problema anterior...

Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 \dots \\
 x_i \\
 \dots \\
 x_6 \\
 x_7
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 \dots \\
 0 \\
 20
 \end{Bmatrix}$$

- Se construyen múltiples matrices frontales de forma que su suma sea igual a la matriz original.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Las variables se dividen en partes:

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$x_i = x_i^I + x_i^{II}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

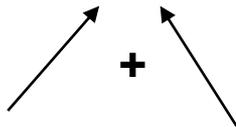
Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

- Se construyen todas las matrices frontales

Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

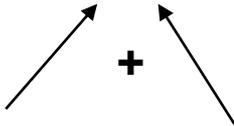


$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

- La primer y segunda matriz frontal se suman en una matriz 3x3.
 - La primer y segunda fila están totalmente definidas

Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



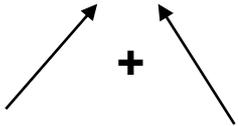
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

■ Elimino primera columna

□ $F2 = F2 - [1/h^2] * F1$

Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

■ Elimino primera columna

□ $F2 = F2 - [1/h^2] * F1$

Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix} -2/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4 \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

- Sumo los frentes 3 y 4 en una matriz 3x3
 - Ahora solo la segunda fila (ecuación) está completamente definida

Solver Multifrontal

$$\begin{bmatrix} -2/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2/h^2 & 1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 & 0 \\ 1/h^2 & 0 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4 \\ x_3^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

- Sumo los frentes 3 y 4 en una matriz 3x3
 - Ahora solo la segunda fila (ecuación) está completamente definida
- Reordeno!

Solver Multifrontal

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{matrix} -2/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\
 + \\
 \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\
 \boxed{\begin{matrix} -2/h^2 & 1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 & 0 \\ 1/h^2 & 0 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_4 \\ x_3^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

■ Elimino coeficientes debajo de la diagonal...

- $F2 = F2 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F1$
- $F3 = F3 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F1$

Solver Multifrontal

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{array}{cc} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_2 \\ x_3^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \} \end{array} \\
 \nearrow \quad + \quad \nwarrow \\
 \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ 0 & \frac{1}{2h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_4 \\ x_3^{II} \\ x_5^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \\ 0 \} \end{array} \\
 \nearrow \quad + \quad \nwarrow
 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_1 \\ x_2^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \} \end{array} \quad
 \boxed{\begin{array}{cc} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_2^{II} \\ x_3^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \} \end{array} \quad
 \boxed{\begin{array}{cc} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_3^{II} \\ x_4^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \} \end{array} \quad
 \boxed{\begin{array}{cc} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_4^{II} \\ x_5^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \} \end{array} \quad
 \boxed{\begin{array}{cc} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_5^{II} \\ x_6^I \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 0 \} \end{array} \quad
 \boxed{\begin{array}{cc} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 1 \end{array}} \begin{array}{l} \{ x_6^{II} \\ x_7 \} = \begin{array}{l} \{ 0 \\ 20 \} \end{array}
 \end{array}$$

■ Elimino coeficientes debajo de la diagonal...

- $F2 = F2 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F1$
- $F3 = F3 - [1/h^2] / [-2/h^2] * F1$

Solver Multifrontal

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{matrix} -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{2h^2} \\ \frac{1}{2h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{2}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6 \\ x_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix} \\
 \nearrow \quad + \quad \nwarrow & \nearrow \quad + \quad \nwarrow & \nearrow \quad + \quad \nwarrow
 \end{array}$$

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{h^2} & \frac{1}{h^2} \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

■ Repito el proceso con los frentes 5 y 6

□ Ahora las ecuaciones 2 y 3 están completamente definidas...

Solver Multifrontal Paralelo

$$\begin{array}{cccccc}
 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{matrix} \{ x_1 \\ x_2^I \} \\ = \{ 0 \\ 0 \} \end{matrix} &
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{matrix} \{ x_2^{II} \\ x_3^I \} \\ = \{ 0 \\ 0 \} \end{matrix} &
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{matrix} \{ x_3^{II} \\ x_4^I \} \\ = \{ 0 \\ 0 \} \end{matrix} &
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{matrix} \{ x_4^{II} \\ x_5^I \} \\ = \{ 0 \\ 0 \} \end{matrix} &
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{matrix} \{ x_5^{II} \\ x_6^I \} \\ = \{ 0 \\ 0 \} \end{matrix} &
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{matrix} \{ x_6^{II} \\ x_7 \} \\ = \{ 0 \\ 20 \} \end{matrix}
 \end{array}$$

Proc. 1

Proc. 2

Proc. 3

Proc. 4

Proc. 5

Proc. 6

- Genero todos los frentes en paralelo...

Solver Multifrontal Paralelo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4 \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6 \\ x_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_6^{II} \\ x_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

Proc. 1

Proc. 2

Proc. 3

Proc. 4

Proc. 5

Proc. 6

- La suma y eliminación de distintos pares de matrices frontales se ejecuta en paralelo...

Solver Multifrontal Paralelo

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 + \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \boxed{\begin{matrix} -2/h^2 & 1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & -1/h^2 & 1/2h^2 \\ 0 & 1/2h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_3^{II} \\ x_5^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 + \\
 \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1/h^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_6 \\ x_5^{II} \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_2^{II} \\ x_3^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_3^{II} \\ x_4^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_4^{II} \\ x_5^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 1/h^2 & -1/h^2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_5^{II} \\ x_6^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad
 \boxed{\begin{matrix} -1/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} x_6^{II} \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Proc. 1

Proc. 2

Proc. 3

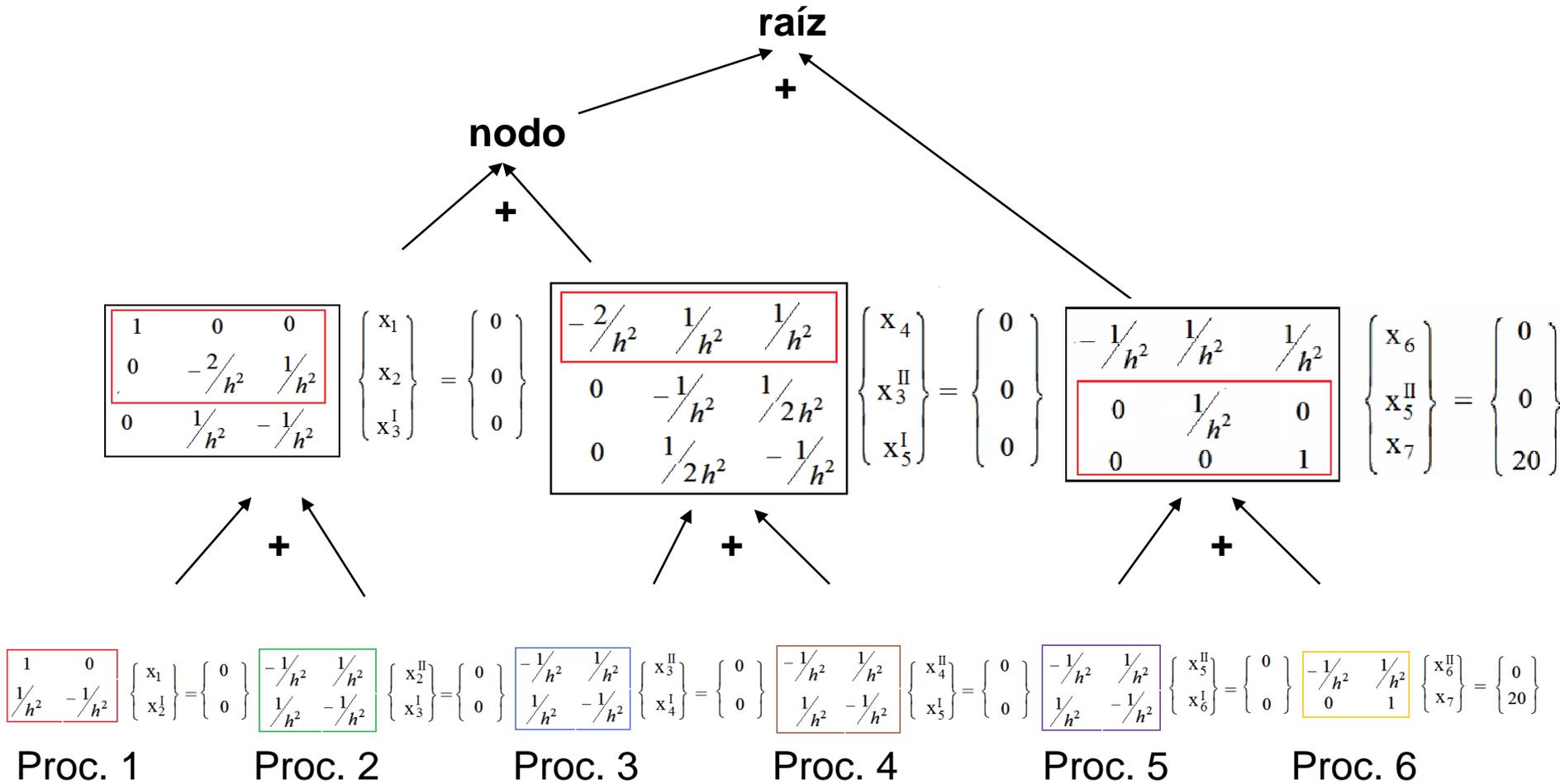
Proc. 4

Proc. 5

Proc. 6

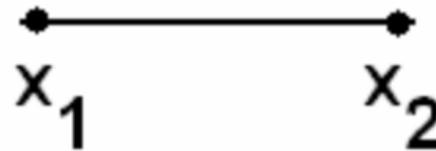
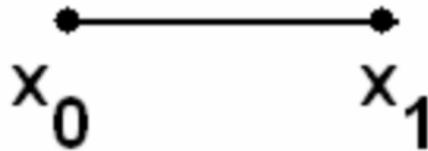
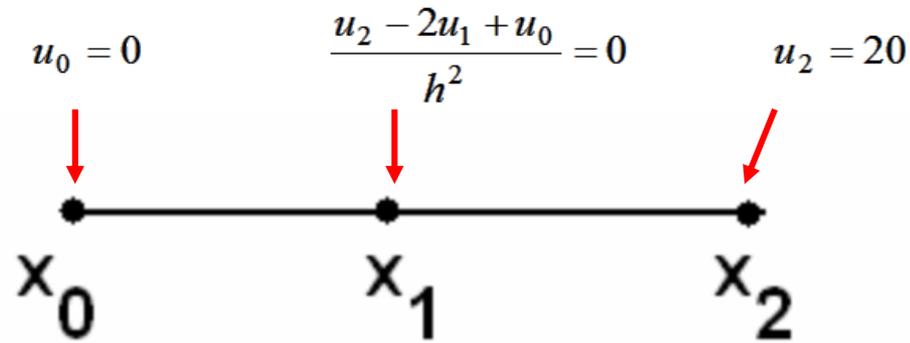
- La suma y eliminación de distintos pares de matrices frontales se ejecuta en paralelo...

Solver Multifrontal Paralelo



- El proceso se repite para los siguientes niveles del árbol hasta alcanzar la raíz

Resumen (idea básica del solver paralelo)



$$u_0 = 0 \quad \frac{u_0 - u_1}{h^2} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{u_2 - u_1}{h^2} = 0 \quad u_2 = 20$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resumen (idea básica del solver paralelo)

PROC. 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F2 = F2 - 1/h^2 * F1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{20}{h^2} \end{Bmatrix}$$

resuelvo

$$u_1 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \uparrow$$

PROC. 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{h^2} & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$F2 = F2 - 1/h^2 * F1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{20}{h^2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{envío } -\frac{1}{h^2} u_1^2 = \frac{-20}{h^2}$$

$$\text{envío } u_1 = 10$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 10 \end{Bmatrix} \quad \uparrow$$

Bibliotecas con métodos frontales y multifrontales

■ Frontales

□ HSL (Harwell Subroutine Library)

■ MA42

- Solver frontal out-of-core no simétrico propuesto por Duff y Scott (1996)

■ MA62

- Solver frontal out-of-core simétrico propuesto por Duff y Scott (1997)

Bibliotecas con métodos frontales y multifrontales

■ Multifrontales

□ MUMPS

- Método multifrontal no simétrico distribuido.

□ UMFPACK

- Método multifrontal no simétrico propuesto por Davis (actualmente parte de SuiteSparse y distribuido con Matlab).

□ HSL (Harwell Subroutine Library)

- MA38, MA41, MA57, HSL_MA77, HSL_MA78.

Referencias

■ Frontales

- Irons B., 1970: A frontal solution program for finite-element analysis. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2, 5-32

■ Multi-frontales

- Duff I. S., Reid J. K., 1983: The multifrontal solution of indefinite sparse symmetric linear systems. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 9, 302-325
- Duff I. S., Reid J. K., 1984: The multifrontal solution of unsymmetric sets of linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 5, 633-641

■ Solvers:

- Multi-frontal Massively Parallel sparse direct Solver (MUMPS)
- Amestoy P. R., Duff I. S., L'Excellent J.-Y., 2000: Multifrontal parallel distributed symmetric and unsymmetric solvers. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184, 501-520
- Amestoy P. R., Guermouche A., L'Excellent J.-Y., Pralet S., 2006: Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32, 2, 136-156
- Otros solvers multi-frontales paralelos: PARDISO, TAUCS.