Universidad de la República — **Cálculo diferencial e integral en varias variables**

Facultad de Ingeniería - IMERL — **Primer Semestre 2018**

Simulacro de Primer parcial

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar y -1 si la respuesta es incorrecta.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes, con letras mayúsculas imprenta: A, B, C, D o E.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6

Ejercicio 1

Considere el polinomio complejo $P(z) = z^4 + z$, y sea $A \subset \mathbb{C}$ el conjunto de raíces de $P(z)$. Entonces Indicar la opción correcta:

(A) El conjunto A tiene infinitos elementos.

(B) El conjunto A tiene 4 elementos, ubicados en los vértices de un cuadrado.

(C) El conjunto A tiene 3 elementos, ubicados en los vértices de un triángulo.

(D) El conjunto A tiene 4 elementos, dos de ellos con parte real $\frac{1}{2}$.

(E) El conjunto A tiene 4 elementos, todos la misma parte imaginaria.

Ejercicio 2

Considere los siguientes problemas de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x) = 3x^2 y(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ las soluciones de estos problemas. Entonces $y_1(-1) + y_2(-1)$ vale:

(A) e^{-3}

(B) $e^{-3} + e$

(C) 0

(D) $e^{-1} + e$

(E) $e^{-3} + e^{-1}$

Ejercicio 3

Considere las siguientes afirmaciones:

Afirmación (I) *Si una sucesión real a_n está acotada, entonces toda subsucesión de a_n es convergente.*

Afirmación (II) *Si a_n es una sucesión de elementos de $[0,1]$, entonces posee una subsucesión convergente a un elemento de $[0,1]$.*

Afirmación (III) *Sea a_n una sucesión real tal que $\lim a_n = +\infty$. Entonces a_n puede tener una subsucesión convergente a un $L \in \mathbb{R}$, y un ejemplo es la sucesión $a_n = (1+(-1)^n)n$.*

Indicar la opción correcta:

(A) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
(B) Solo la afirmación (II) es verdadera.
(C) Ninguna de las afirmaciones (I), (II) y (III) es verdadera.
(D) Solo las afirmaciones (I) y (II) son verdaderas.
(E) Solo las afirmaciones (I) y (III) son verdaderas

Ejercicio 4

Considere las siguientes series:

$$(I)\ \sum \log(n)e^{-n} \qquad\qquad (II)\ \sum \frac{n+1+\sqrt{n}}{n^2+e^{-n}}$$

Entonces:

(A) La serie (I) diverge, y la serie (II) converge.
(B) Ambas series son divergentes.
(C) Ambas series son convergentes.
(D) La serie (I) converge, y la serie (II) diverge.
(E) La serie (II) converge, pero no absolutamente.

Ejercicio 5

Considere la serie y la integral que siguen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad\qquad \int_1^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x dx$$

Entonces:

(A) Tanto la serie como la integral convergen a 2, por el criterio serie-integral.
(B) La serie es convergente, pero no se puede aplicar el criterio serie-integral en este caso.
(C) La serie converge a 2. La integral también converge por el criterio serie-integral, pero no necesariamente converge a 2.
(D) La serie diverge pues el término general no tiende a cero.
(E) La serie converge a 3, pero la integral impropia diverge.

Ejercicio 6

Considere las siguientes integrales impropias.

$$(I)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}dx}{x(x+1)} \qquad\qquad (II)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(1+x^2)(e^x+e^{-x})}$$

Entonces:

(A) La integral (I) diverge, y la integral (II) converge.
(B) Ambas integrales son divergentes.
(C) Ambas integrales son convergentes.
(D) La integral (I) converge, y la integral (II) diverge.
(E) La integral (II) converge, y la integral (I) oscila.

Problema (10 puntos)

a) Definir punto interior a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.
b) i) Definir conjunto abierto.
   ii) Demostrar que la bola abierta $B(0,1)$ es un conjunto abierto.

Considere el siguiente subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \cup \{(2,2)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{Q}^2 : x = -y\}$$

c) Hallar el interior, la frontera, y la clausura de A.
d) i) ¿Existe alguna una sucesión de elementos de A convergente al punto $(-\pi,\pi)$? Si existe, de un ejemplo. Si no existe, justifique.
   ii) ¿Existe alguna una sucesión de elementos de A^C convergente al punto $(-\pi,\pi)$? Si existe, de un ejemplo. Si no existe, justifique.