Universidad de la República
Facultad de Ingenieria
IMERL

Curso Cálculo 1 anual
2013

1. Sobre los Teoremas

[1]

1.1. Teoremas recíprocos y contrarios

El enunciado de todo teorema consta de una premisa llamada *hipótesis*, que expresa lo que se supone se verifica, y de una conclusión llamada *tesis*, que expresa lo que se demuestra que se verifica. Por ejemplo, si un punto C equidista de A y B (hipótesis), C está en la mediatríz del segmento AB (tesis).

Dos teoremas se llaman *recíprocos*, cuando la tesis de uno es la hipótesis del otro y viceversa. La certeza de un teorema no implica la certeza del recíproco.

El teorema cierto: "Si dos triángulos son congruentes sus ángulos son respectivamente iguales" tendría un recíproco falso: "Si dos triángulos tienen respectivamente iguales sus ángulos, son congruentes".
Dos teoremas se llaman *contrarios* cuando la hipótesis y la tesis de este son las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del otro. La certeza de un teorema no implica la del contrario. Por ejemplo, el teorema contrario del anterior es "Si dos triángulos no son congruentes, sus ángulos no son respectivamente iguales" (falso).

1.2. Teoremas contrarrecíprocos. Demostraciones por reducción al absurdo.

Dos teoremas se llaman *contrarrecíprocos* si cada uno de ellos es el contrario del recíproco (o recíproco del contrario) del otro.

Para formar un enunciado contrarrecíproco de uno dado, habrá, pues, que negar la hipótesis y la tesis e invertirlas. El ejemplo contrarrecíproco del teorema anterior es: "Dos triángulos que no tienen sus ángulos respectivamente iguales no son congruentes". En efecto, si lo fueran, tendrían sus ángulos respectivamente iguales, contra lo supuesto. El razonamiento es completamente general: *dos teoremas contrarrecíprocos son equivalentes.*

Supongamos que tenemos demostrado lo siguiente: "Si se verifica H, entonces se verifica T", queda probado el contrarrecíproco: "Si no se verifica T, entonces no se verifica H". Pues si se verificara H, se verificaría T, contra lo supuesto.

Es muy frecuente en Matemática demostrar un teorema probando su contrarrecíproco. Este modo de demostración se llama *demostración por reducción al absurdo*.
Por ejemplo, "Si dos rectas simétricas respecto a un centro no coinciden, son paralelas", lo que es equivalente a probar que si tuvieran algún punto común (negación de la tesis) habrían de coincidir (negación de la hipótesis).

[1]Extracto de *Curso de Geometría Métrica: Tomo 1*, P. Puig Adams, pag 37 – 39.

1.3. Esquema lógico de las relaciones entre teoremas recíprocos, contrarios y contrarrecíprocos.

En el cuadro siguiente estan condensadas esquemáticamente las relaciones lógicas entre un teorema, su recíproco, su contrario y su contrarrecíproco.
A la negación de un enunciado se la indica con el símbolo $\neg$ delante del mismo.

$$\begin{tikzcd} H \Rightarrow T \arrow[r, dash, "\text{recíprocos}"] \arrow[d, dash, "\text{contrarios}"'] \arrow[dr, dashed, dash] \arrow[dr, phantom, "\text{contrarrecíprocos}"] & T \Rightarrow H \arrow[d, dash, "\text{contrarios}"] \arrow[dl, dashed, dash] \\ \neg H \Rightarrow \neg T \arrow[r, dash, "\text{recíprocos}"'] & \neg T \Rightarrow \neg H \end{tikzcd}$$

1.4. Condiciones necesarias y suficientes

Muchas veces se enuncian en Matemática los teoremas hablando de condiciones necesarias y suficientes. Tomando como ejemplo la propiedad de la mediatríz:

Un punto está en la mediatríz de un segmento si y sólo si equidista de sus extremos.

Esta proposición puede expresarse diciendo:

1. Es *suficiente* que el punto esté en la mediatríz del segmento para poder afirmar que equidista de sus extremos.

2. Siempre que ocurra lo primero, tiene *necesariamente* que ocurrir lo segundo. Por tanto, la equidistancia de los extremos es una *condición necesaria* para que el punto esté en la mediatríz.

De un modo general, todo teorema: " Si se verifica H, entonces se verifica T", puede enunciarse de estas dos maneras:

1. La hipótesis H es una condición suficiente para que se verifique la tesis T

2. La tesis T es una condición necesaria para que se verifique la hipótesis H.

Si se demuestran un teorema directo y su recíproco (o su contrario) podemos resumirlos en un solo enunciado diciendo: H es condición necesaria y sufuciente para que se verifique T, o bien T es condición necesaria y suficiente para que se verifique H. O bien por último: T y H son equivalentes.

En resumen: Para demostrar que una condición es necesaria y suficiente hay que demostrar dos teoremas recíprocos entre sí o dos contrarios entre sí.