Lógica proposicional. Deducción natural

Lógica

Justificación de la validez del razonamiento

Justificación semántica: $\Gamma \models \beta$

Probar que la veracidad de las hipótesis implica la veracidad de la conclusión

Justificación sintáctica: $\Gamma \vdash \beta$

Demostrar la conclusión a partir de las hipótesis usando pasos claramente definidos y explicitados.

Justificación sintáctica

$\Gamma \vdash \beta$

- Demostrar la conclusión β a partir de las hipótesis de Γ
- usando pasos claramente definidos y explicitados.

¿Qué es una demostración?

Es una prueba *formal*

- la corrección de la demostración depende de su *forma* y no del significado
- cumplen *reglas* precisas de construcción

Pruebas formales

¿Cómo probamos usualmente?

- Sostenemos hipótesis iniciales (las podemos usar como dato en todo instante de la prueba)
- Encadenamos pasos simples de deducción que nos permite llegar a la conclusión

¿Por qué pruebas formales?

Podemos compilar las pruebas hechas, y asegurar su corrección o detectar errores mediante el análisis de su estructura.

Formalización del razonamiento

Varias maneras de formalizar el razonamiento

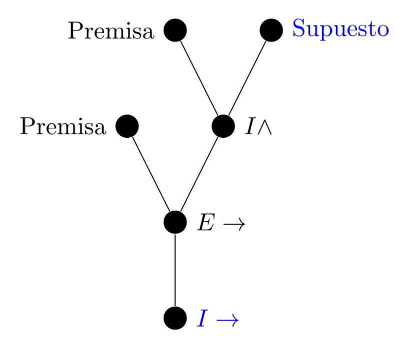
- Método Axiomático (a la Hilbert)
- **Deducción Natural (Gentzen)**
- otros ...

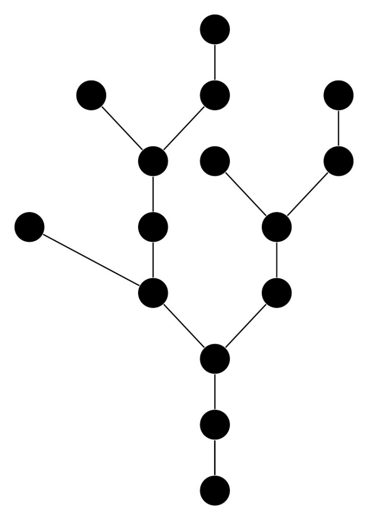
Ejemplo

En Deducción Natural las demostraciones se formalizan mediante árboles

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      [\alpha \to (\beta \to \gamma)]^1
      \qquad
      \dfrac{
        \dfrac{
          [\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]^2
          \qquad
          \dfrac{[\neg\alpha]^3}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\, I\vee_1
        }{\bot}\, E\neg
      }{\alpha}\, RAA^{(3)}
    }{\beta \to \gamma}\, E \to
    \qquad
    \dfrac{
      \dfrac{
        [\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)]^2
        \qquad
        \dfrac{[\neg\beta]^3}{\neg\alpha \vee \neg\beta}\, I\vee_1
      }{\bot}\, E\neg
    }{\beta}\, RAA^{(3)}
  }{
    \dfrac{\gamma}{\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \gamma}\, I \to^{(2)}
  }\, E \to
}{(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \gamma)}\, I \to^{(1)}
$$

Algunos árboles de prueba





Deducción natural

Reglas de construcción de pruebas

- Construyen una prueba a partir de subpruebas más simples
- Manejan correctamente las hipótesis (hipótesis globales) y supuestos (hipótesis locales) en cada etapa de la prueba

El análisis de corrección de una prueba formal puede mecanizarse, y lo ha sido. Existen asistentes y verificadores automáticos de pruebas para el cálculo proposicional.

Reglas de construcción de pruebas

En general, para cada conectivo se definen

Reglas de introducción

Indican cómo *probar* una fórmula con ese conectivo

Reglas de eliminación

Indican cómo *utilizar* una fórmula con ese conectivo en una prueba

¿Cómo probar una conjunción?

Hipótesis: $\delta_1, \dots \delta_n$

Tesis: $\alpha \wedge \beta$

Demostración

- Probamos α usando $\delta_1, \dots \delta_n$
- Probamos β usando $\delta_1, \dots \delta_n$
- Luego, hemos probado $\alpha \wedge \beta$ usando $\delta_1, \dots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{matrix}\delta_1, \dots \delta_n \\ \vdots \\ \alpha\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\delta_1, \dots \delta_n \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \wedge \beta}\ I\wedge$$

¿Cómo probar un implica?

Hipótesis: $\delta_1, \dots \delta_n$

Tesis: $\alpha \to \beta$

Demostracion

- Supongamos α
- Probamos β usando $\delta_1, \dots \delta_n$ y α
- Luego, hemos probado $\alpha \to \beta$ usando $\delta_1, \dots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \dots \delta_n, [\alpha]^k \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}\; I \to^{(k)}$$

¿Cómo probar una disyunción?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: $\alpha \vee \beta$

Demostración

- Probamos α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Luego, hemos probado $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n \\ \vdots \\ \alpha\end{array}}{\alpha \vee \beta}\ I\vee_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n \\ \vdots \\ \beta\end{array}}{\alpha \vee \beta}\ I\vee_2$$

¿Cómo probar un si y sólo si?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: $\alpha \leftrightarrow \beta$

Demostración

- *Directo.* Supongamos α, y probemos β usando $\delta_1, \ldots \delta_n$ y α
- *Recíproco.* Supongamos β, y probemos α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$ y β
- Luego, hemos probado $\alpha \leftrightarrow \beta$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n[\alpha]^k\\ \vdots\\ \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n[\beta]^k\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}\; I \leftrightarrow^{(k)}$$

¿Cómo probar una negación?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: $\neg\alpha$

Demostración

- Supongamos α
- Probamos $\perp$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$ y α
- Luego, hemos probado $\neg\alpha$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n [\alpha]^k \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg\alpha}\; I_{\neg}^{(k)}$$

¿Cómo utilizar una conjunción?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: α

Demostración

- Probamos $\alpha \wedge \beta$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n \\ \vdots \\ \alpha \wedge \beta\end{array}}{\alpha}\ E\wedge_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n \\ \vdots \\ \alpha \wedge \beta\end{array}}{\beta}\ E\wedge_2$$

¿Cómo utilizar una implicancia?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: β

Demostración

- Probamos $\alpha \to \beta$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Probamos α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Luego, hemos probado β usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n\\ \vdots\\ \alpha \to \beta\end{array}\qquad \begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\beta}\; E\to$$

¿Cómo utilizar una disyunción?

Hipótesis: $\delta_1, \dots \delta_n$

Tesis: δ

Demostración

- Probamos $\alpha \vee \beta$ usando $\delta_1, \dots \delta_n$
- *Caso A.* Probamos δ usando $\delta_1, \dots \delta_n$ y α
- *Caso B.* Probamos δ usando $\delta_1, \dots \delta_n$ y β
- Luego, hemos probado δ usando $\delta_1, \dots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \dots \delta_n \\ \vdots \\ \alpha \vee \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1, \dots \delta_n [\alpha]^k \\ \vdots \\ \delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1, \dots \delta_n [\beta]^k \\ \vdots \\ \delta\end{array}}{\delta}\; E\vee^{(k)}$$

¿Cómo utilizar un si y sólo si?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: β

Demostración

- Probamos $\alpha \leftrightarrow \beta$ usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Probamos α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Luego, hemos probado β usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n\\ \vdots\\ \alpha \leftrightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\beta}\; E\leftrightarrow_1$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n\\ \vdots\\ \alpha \leftrightarrow \beta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n\\ \vdots\\ \beta\end{array}}{\alpha}\; E\leftrightarrow_2$$

¿Cómo utilizar una negación?

Hipótesis: $\delta_1, \dots \delta_n$

Tesis: Absurdo

Demostración

- Probamos $\neg\alpha$ usando $\delta_1, \dots \delta_n$
- Probamos α usando $\delta_1, \dots \delta_n$
- Luego, hemos probado $\perp$ usando $\delta_1, \dots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \dots \delta_n\\ \vdots\\ \neg\alpha\end{array}\qquad \begin{array}{c}\delta_1, \dots \delta_n\\ \vdots\\ \alpha\end{array}}{\perp}\,{\scriptstyle E\neg}$$

¿Cómo utilizar el absurdo?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: α

Demostración (reducción al absurdo)

- Supongamos $\neg\alpha$
- Llegamos a una contradicción usando $\delta_1, \ldots \delta_n$ y $\neg\alpha$
- Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c} \delta_1, \ldots \delta_n, [\neg\alpha]^k \\ \vdots \\ \bot \end{array}}{\alpha}\ RAA^{(k)}$$

¿Cómo utilizar el absurdo?

Hipótesis: $\delta_1, \ldots \delta_n$

Tesis: α

Demostración

- Llegamos a una contradicción usando $\delta_1, \ldots \delta_n$
- Luego, hemos probado α usando $\delta_1, \ldots \delta_n$

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \ldots \delta_n \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\alpha}\, E\bot$$

Una prueba trivial

Hipótesis: $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \alpha, \ldots, \gamma_n$

Tesis: α

Demostración

- La tesis vale porque suponemos la hipótesis.

$$\alpha \quad \mathit{HIP}$$

Pruebas = Árboles

- Las derivaciones se definen inductivamente como un conjunto de árboles etiquetados y ”bien plantados :-)”, o sea, con la raiz debajo de las hojas.
- Cada nodo, interno u hoja, se etiqueta con una fórmula proposicional y una regla y si genera *hipótesis locales (supuestos)*, se le pone un superíndice.
- Las *hojas* son las *hipótesis* de la prueba.
- La *raíz* es la *conclusión* de la prueba.

Pruebas = Árboles

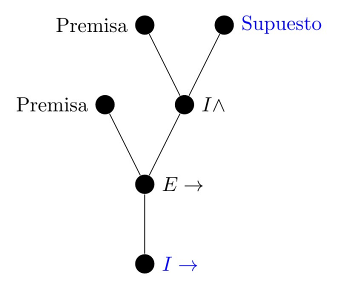
- De las hojas hacia la raíz se pasa por aplicación de alguna de las *reglas de construcción*.
- Las *hipótesis locales* a subpartes de una prueba se representan con hojas tachadas o usando $[\_]^n$ donde n es el super de la regla que la introdujo.
- En cada nodo, importa el orden de sus hijos.

Ejemplo: $\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\beta}\,E\wedge_2 \qquad \dfrac{[\alpha \wedge \beta]^1}{\alpha}\,E\wedge_1}{\beta \wedge \alpha}\,I\wedge}{\alpha \wedge \beta \to \beta \wedge \alpha}\,I\to^1$$

Ejemplo: $\alpha \wedge \beta \to \gamma, \alpha \vdash \beta \to \gamma$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \wedge \beta \to \gamma \qquad \dfrac{\alpha \quad [\beta]^1}{\alpha \wedge \beta}\ I\wedge}{\gamma}\ E\to}{\beta \to \gamma}\ I\to 1$$



Definición 1.5.1. Derivaciones ($\mathtt{DER}$)

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

HIP

Si $\varphi \in \mathtt{PROP}$, entonces $\varphi \in \mathtt{DER}$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$I\wedge$

Si $\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \in \mathtt{DER}$ y $\begin{array}{c} \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi}\ I\wedge \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E\wedge_1$

Si $\begin{array}{c} \bigtriangledown\!\!\!\!\!\!D \\ \varphi \wedge \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\frac{\begin{array}{c} \bigtriangledown\!\!\!\!\!\!D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\varphi}\, E\wedge_1 \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E\wedge_2$

Si $\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \varphi \wedge \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \varphi \wedge \psi \end{array}}{\psi}\, E\wedge_2 \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$I \to$

Si $\begin{array}{c} \varphi \\ \bigtriangledown D \\ \psi \end{array}$ $\in \mathtt{DER}$, entonces

$$\cfrac{\begin{array}{c} [\varphi] \\ \bigtriangledown D \\ \psi \end{array}}{\varphi \to \psi}\, I \to \; \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E \to$

Si $\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \to \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$ y $\begin{array}{c} \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \varphi \to \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array}}{\psi} E \to \; \in \mathtt{DER}$$

Definición 1.5.1. Derivaciones ($\mathtt{DER}$) (7/16)

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$I\vee_1$

Si $\underset{\varphi}{\overset{D}{\bigtriangledown}}$ $\in \mathtt{DER}$, entonces

$$\cfrac{\underset{\varphi}{\overset{D}{\bigtriangledown}}}{\varphi \vee \psi}\, I\vee_1 \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$I\vee_2$

Si $\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \psi \end{array}}{\varphi \vee \psi}\, I\vee_2 \in \mathtt{DER}$$

Definición 1.5.1. Derivaciones (DER) (9/16)

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E\lor$

Si $\begin{array}{c} D \\ \varphi \lor \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$, $\begin{array}{c} \varphi \\ D' \\ \gamma \end{array} \in \mathtt{DER}$, y $\begin{array}{c} \psi \\ D'' \\ \gamma \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \lor \psi \end{array} \quad \begin{array}{c} [\varphi] \\ D' \\ \gamma \end{array} \quad \begin{array}{c} [\psi] \\ D'' \\ \gamma \end{array}}{\gamma}\, E\lor \in \mathtt{DER}$$

Definición 1.5.1. Derivaciones (DER) (10/16)

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$I \leftrightarrow$

Si $\begin{array}{c}\varphi\\ \bigtriangledown D\\ \psi\end{array} \in \mathtt{DER}$ y $\begin{array}{c}\psi\\ \bigtriangledown D'\\ \varphi\end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi]\\ \bigtriangledown D\\ \psi\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\psi]\\ \bigtriangledown D'\\ \varphi\end{array}}{\varphi \leftrightarrow \psi}\; I\leftrightarrow \;\in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E \leftrightarrow_1$

Si $\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array} \in \mathtt{DER}$ y $\begin{array}{c} \bigtriangledown D' \\ \varphi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown D \\ \varphi \leftrightarrow \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \bigtriangledown D' \\ \varphi \end{array}}{\psi} \; E \leftrightarrow_1 \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E \leftrightarrow_2$

Si $\underset{\varphi \leftrightarrow \psi}{\overset{D}{\bigtriangledown}} \in \mathtt{DER}$ y $\underset{\psi}{\overset{D'}{\bigtriangledown}} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\underset{\varphi \leftrightarrow \psi}{\overset{D}{\bigtriangledown}} \qquad \underset{\psi}{\overset{D'}{\bigtriangledown}}}{\varphi}\, E \leftrightarrow_2 \ \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$I\neg$

Si $\begin{array}{c}\varphi \\ \bigtriangledown\!\!\!\!\!D \\ \bot\end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi] \\ \bigtriangledown\!\!\!\!\!D \\ \bot\end{array}}{\neg\varphi}\, I\neg \in \mathtt{DER}$$

Definición 1.5.1. Derivaciones (DER) (14/16)

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E\neg$

Si $\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \neg\varphi \end{array} \in \mathtt{DER}$ y $\begin{array}{c} \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \overset{D}{\bigtriangledown} \\ \neg\varphi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \overset{D'}{\bigtriangledown} \\ \varphi \end{array}}{\bot}\, E\neg \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}\left(\mathcal{E}\right)$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

$E\perp$

Si $\begin{array}{c} \bigtriangledown_{D} \\ \perp \end{array} \in \mathtt{DER}$ y $\varphi \in \mathtt{PROP}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} \bigtriangledown_{D} \\ \perp \end{array}}{\varphi}\, E\perp \in \mathtt{DER}$$

El conjunto $\mathtt{DER} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{E})$ de las derivaciones de la lógica proposicional se define inductivamente como sigue:

RAA

Si $\begin{array}{c} \neg\varphi \\ \bigtriangledown D \\ \bot \end{array} \in \mathtt{DER}$, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \bigtriangledown D \\ \bot \end{array}}{\varphi}\, RAA \in \mathtt{DER}$$

Conclusión e hipótesis

Ejercicio

Sea $D \in \mathtt{DER}$. Llamamos $C(D)$ a la conclusión de D, y $H(D)$ al conjunto de hipótesis no canceladas de D.

Defina recursivamente sobre $\mathtt{DER}$

1. $C(D)$, y
2. $H(D)$, asumiendo que al aplicarse las reglas se realizan todas las cancelaciones (o descargas) posibles.

Consecuencia sintáctica

Definición 1.5.2

Sean $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$ y $\varphi \in \texttt{PROP}$. Decimos que φ *es consecuencia sintáctica de* Γ (o que φ *se deriva de* Γ ssi existe $D \in \texttt{DER}$ tal que

$$C(D) = \varphi \qquad \text{y} \qquad H(D) \subseteq \Gamma$$

Notación

- $\Gamma \vdash \varphi$ se lee "φ se deriva de Γ"
- $\emptyset \vdash \varphi$ se lee "φ es teorema", y se escribe $\vdash \varphi$

Consecuencias sintácticas

Definición. $\textsc{Cons}$

Sea $\Gamma \subseteq \texttt{PROP}$. El conjunto de las consecuencias sintácticas de Γ es

$$\textsc{Cons}\,(\Gamma) = \{\varphi \in \texttt{PROP} | \Gamma \vdash \varphi\}$$

Ejercicio: $\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\varphi]^1 \quad [\neg\varphi]^2}{\bot}\, E\neg}{\varphi}\, RAA^{(2)}}{\neg\neg\varphi \to \varphi}\, I \to^{(1)}
$$

Ejercicio: $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha]^2 \quad [\alpha]^1}{\bot}\ E\neg}{\neg\neg\alpha}\ I\neg^{(2)}}{\alpha \to \neg\neg\alpha}\ I\to^{(1)}
$$

Propiedades de $\wedge$, $\to$ y $\perp$

Lema 1.5.3

Sean $\alpha \in \mathtt{PROP}$, $\beta \in \mathtt{PROP}$, $\Gamma \subseteq \mathtt{PROP}$, $\Delta \subseteq \mathtt{PROP}$:

Si $\alpha \in \Gamma$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha$
Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Delta \vdash \beta$	entonces	$\Gamma, \Delta \vdash \alpha \wedge \beta$
Si $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \beta$
Si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$
Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Delta \vdash \alpha \to \beta$	entonces	$\Gamma, \Delta \vdash \beta$
Si $\Gamma \vdash \perp$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha$
Si $\Gamma, \neg\alpha \vdash \perp$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha$

Propiedades de $\vee$, $\leftrightarrow$ y $\neg$

Lema 1.7.2

Sean $\alpha \in \mathtt{PROP}$, $\beta \in \mathtt{PROP}$, $\gamma \in \mathtt{PROP}$, $\Gamma \subseteq \mathtt{PROP}$, $\Delta \subseteq \mathtt{PROP}$:

Si $\Gamma \vdash \alpha$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$
Si $\Gamma \vdash \beta$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$
Si $\Gamma, \alpha \vdash \gamma$ y $\Gamma, \beta \vdash \gamma$	entonces	$\Gamma, \alpha \vee \beta \vdash \gamma$
Si $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ y $\Gamma, \beta \vdash \alpha$	entonces	$\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$
Si $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$	entonces	$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ y $\Gamma, \beta \vdash \alpha$
Si $\Gamma, \alpha \vdash \bot$	entonces	$\Gamma \vdash \neg\alpha$
Si $\Gamma \vdash \alpha$ y $\Delta \vdash \neg\alpha$	entonces	$\Gamma, \Delta \vdash \bot$

Equivalencias entre conectivos

Teorema 1.7.3

Sean $\alpha \in \mathtt{PROP}$, $\beta \in \mathtt{PROP}$:

$$
\begin{array}{lcr}
\vdash \neg\alpha & \leftrightarrow & \alpha \to \bot \\
\vdash \alpha \vee \beta & \leftrightarrow & \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \\
\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) & \leftrightarrow & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\vdash \alpha \leftrightarrow \beta & \leftrightarrow & (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \\
\vdash \alpha \wedge \beta & \leftrightarrow & \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\
\vdash (\alpha \to \beta) & \leftrightarrow & (\neg\alpha \vee \beta) \\
\vdash \bot & \leftrightarrow & \neg(\alpha \vee \neg\alpha)
\end{array}
$$

Más propiedades

Teorema 1.5.4

Sean $\alpha \in \mathtt{PROP}$, $\beta \in \mathtt{PROP}$, $\gamma \in \mathtt{PROP}$:

$$
\begin{aligned}
&\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
&\vdash \alpha \to (\neg\alpha \to \beta) \\
&\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma \\
&\vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\beta \to \neg\alpha \\
&\vdash \neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha \\
&\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \land \beta \to \gamma) \\
&\vdash \alpha \to (\beta \to \gamma) \leftrightarrow (\alpha \land \beta \to \gamma) \\
&\vdash \bot \leftrightarrow \alpha \land \neg\alpha
\end{aligned}
$$

Propiedades interesantes de $\vdash$

- Si $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Gamma \vdash \alpha$, entonces $\Delta \vdash \alpha$
- Si $\Gamma \vdash \alpha$, entonces existe $\Delta \subseteq \Gamma$ tal que Δ es finito y $\Delta \vdash \alpha$
- Si $\Delta \vdash \alpha$ y $\Gamma \vdash \delta$ para todo $\delta \in \Delta$, entonces $\Gamma \vdash \alpha$