Modelos Combinatorios de Confiabilidad en Redes.

Dr. Ing. Franco Robledo (Responsable del Curso)
IMERL/Dpto. de Investigación Operativa (INCO) - UDELAR
Montevideo, Uruguay.

Curso de Postgrado, marzo de 2009

Facultad de Ingeniería - UDELAR

QUINTO SET DE TRANSPARENCIAS.

Una Cota Inferior para $R_n(G)$

- Presentaremos una nueva cota inferior para el cálculo de $R_n(G)$.

- Asumción: aristas perfectas y nodos operan con probabilidad p (i.e. fallan con probabilidad $q = 1 - p$).

$\Rightarrow$ Introducida por: Mohamed H.S. Mohamed et al. [1], Marzo, 2009.

- Veremos una cota inferior rígida para $R_n(G)$ y un algoritmo para computarla.

Una Cota Inferior para $R_n(G)$

NOTACIÓN:

- $R_n(G)$ *node-reliability* de G.
- n número de nodos del grafo G.
- k nivel de nodo-conectividad del grafo G.
- $\underline{R}(G)$ cota inferior de $R_n(G)$ a computar.
- Δ máximo grado en G.
- $\Pr\{A\}$ probabilidad del evento aleatorio A.
- $F_i(G)$ número de subgrafos conexos de G inducido por i nodos de G.
- p probabilidad de operación de los nodos.
- q probabilidad de falla de los nodos.

Una Cota Inferior para $R_n(G)$

$\Rightarrow$ Recordemos que una forma de computar $R_n(G)$ viene dada por:

$$R_n(G) = \sum_{i=0}^{n} F_i(G) \cdot q^{n-i} \cdot (1-q)^i.$$

TEOREMA (MOHAMED H.S. MOHAMED ET AL., MARZO 2009): *Sea G un grafo de n nodos, con probabiliad de falla q, grado máximo Δ, y nodo-conectividad k. Entonces, una cota inferior para $R_n(G)$ es:*

$$R_n(G) \geq \sum_{i=2}^{r} (r-i+1)(q^k)^{r-i}(1-q^k)^i,$$

donde $r = \left((n-\Delta)\left(\left\lceil \frac{n(k-1)}{k} + 1 \right\rceil\right)\right) + 2^{\lfloor \frac{1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{3}{\Delta+k} \rfloor - \lfloor \frac{\Delta}{n-1} \rfloor} + 1.$

Una Cota Inferior para $R_n(G)$

$\Rightarrow$ Antes de computar la cota inferior $\underline{R}(G)$ se necesita computar el nivel de nodo-conectividad de G. Por ejemplo, vía la aplicación del Algoritmo de Henzinger-Rao-Gabow [3].

ALGORITMO LOWER BOUND DE $R_n(G)$

Input: G, q, k, Δ;
Output: $\underline{R}(G)$;

1: $r \leftarrow \left((n-\Delta)\left(\left\lceil \frac{n(k-1)}{k} + 1 \right\rceil \right) \right) + 2^{\lfloor \frac{1}{k} \rfloor - \lfloor \frac{3}{\Delta+k} \rfloor - \lfloor \frac{\Delta}{n-1} \rfloor} + 1$;
2: $\underline{R}(G) \leftarrow 0$;
3: **for** $i = 2$ **to** r **do**
4: $\quad \underline{R}(G) \leftarrow \underline{R}(G) + \left((r-i+1)(q^k)^{r-i}(1-q^k)^i \right)$;
5: **end_for;**
6: **Retornar** $\underline{R}(G)$;
7: **fin;**

Figure 1: ALGORITHM LOWER-BOUND.

Una Cota Inferior para $R_n(G)$

PROPOSICIÓN (COMPLEJIDAD DEL ALGORITMO): *El algoritmo propuesto para* $\underline{R}(G)$ *tiene complejidad* $O(\min\{k^3 + n, kn\} \cdot kn)$.

- Este orden viene dado por el esfuerzo principal dado por el cómputo del valor k mediante el Algoritmo de Henzinger-Rao-Gabow. Dicha computación se realiza con orden: $O(\min\{k^3 + n, kn\} \cdot kn)$.

- Mientras que $O(n^2)$ es el orden de la suma de la cota inferior dada por el teorema.

- Se tomó las siguientes clases de grafos para análisis experimental: Order n path P_n; Star graph S_n; Circle graph C_n; $p-$dimension hypercube Q_p; Harary graph $H_{k,n}$.

Una Cota Inferior para $R_n(G)$

- El Teorema de He-Chen [2] introduce una de las mejores cotas inferiores conocidas para $R_n(G)$.

- Ahora, empiricamente, la cota inferior provista por Mohamed H.S. Mohamed et al. mostró ser:
  - más ajustada que la cota inferior de He-Chen.
  - más rápida de ser computada que la cota inferior de He-Chen. Cabe señalar que la cota inferior de He-Chen tiene complejidad $O(n^5)$.

$\Rightarrow$ El valor de $\underline{R}(G)$ provisto por Mohamed H.S. Mohamed et al. puede entonces considerarse una buena estimación para $R_n(G)$ en sistemas distribuidos.

Bibliografía.

References

[1] Mohamed H.S. Mohamed and Yang Xiao-zong and Liu Hong-wei and Wu Zhi-bo, “An Efficient Algorithm for Reliability Lower Bound of Distributed Systems”, Proceedings of World Academy of Science, Engineering and Technology, vol. 39, March 2009, pages 40-42.

[2] Z. He and Y. Chen, “Efficient algorithms for residual connectedness reliability of distributed systems”, Proceedings of the First International Workshop on Distributed Computing, Communication and Applications, Islamabad, Pakistan, May 2000, pages 151-159.

[3] M.R. Henzinger and S. Rao and H.N. Gabow, “Computing vertex connectivity: new bounds from old techniques”, Journal of Algorithms, vol. 34, no. 2, pages 222-250, 2000.