

Evaluación por métodos de Monte Carlo de medidas de confiabilidad de redes

Héctor Cancela

Depto. de Investigación Operativa

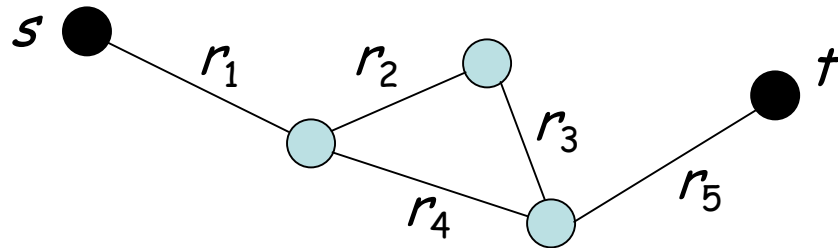
Instituto de Computación, Facultad de Ingeniería

Universidad de la República, Uruguay

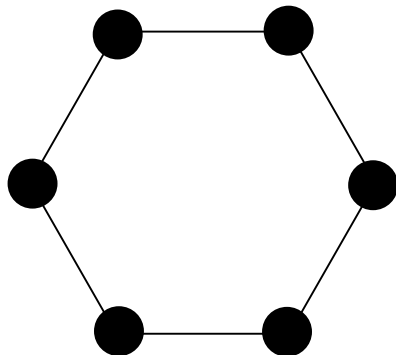
AGENDA

- Confiabilidad de redes.
- Simulación.
- Ejemplo 1: Reducción Recursiva de Varianza.
- Ejemplo 2: Reformulación de Monte Carlo estándar.
- Formas de comparación de métodos.
- Conclusiones, líneas de trabajo.

1 CONFIABILIDAD DE REDES



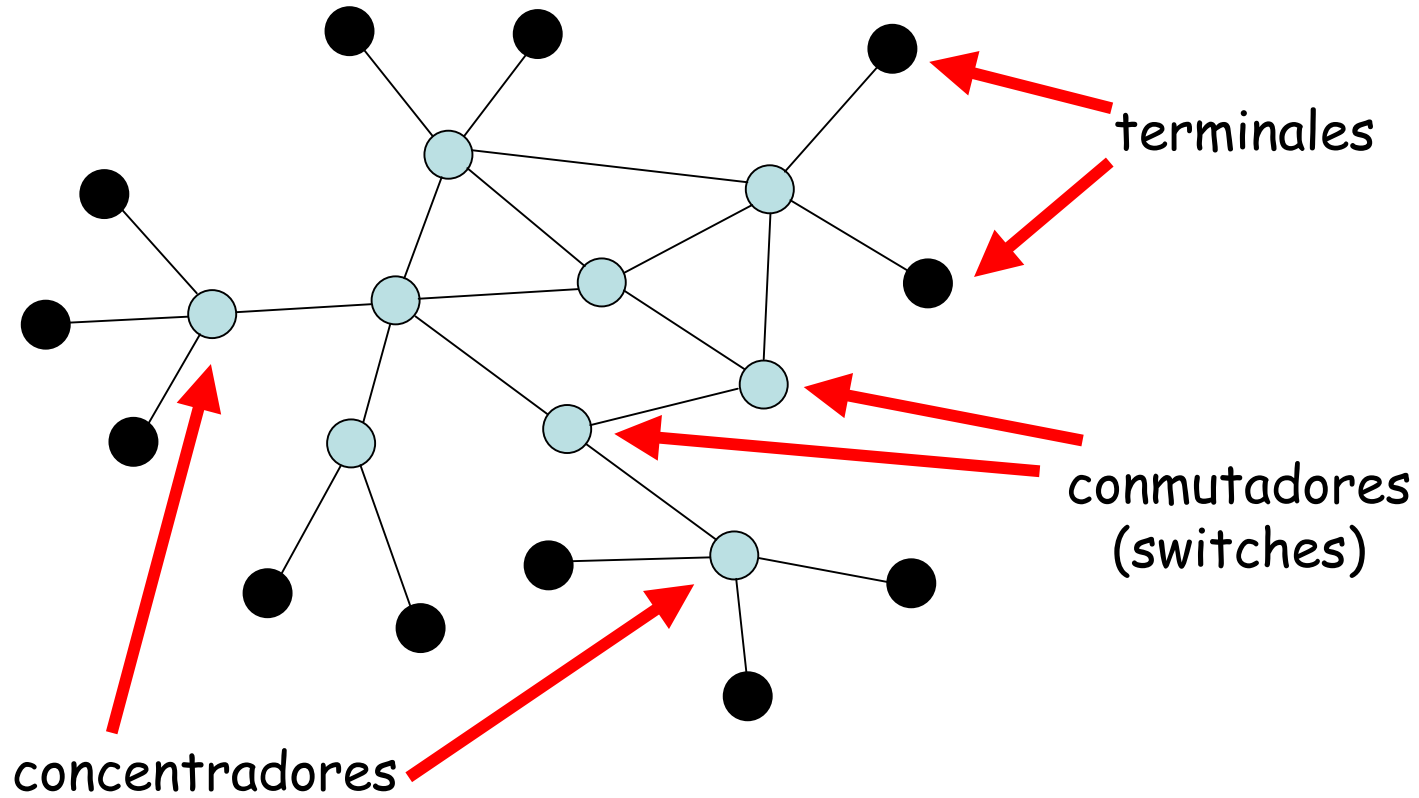
$$R_{st} = r_1(r_2 r_3 + r_4 - r_2 r_3 r_4)r_5$$



$$r_i = r$$
$$R_{\text{all}} = r^5(6 - 5r)$$

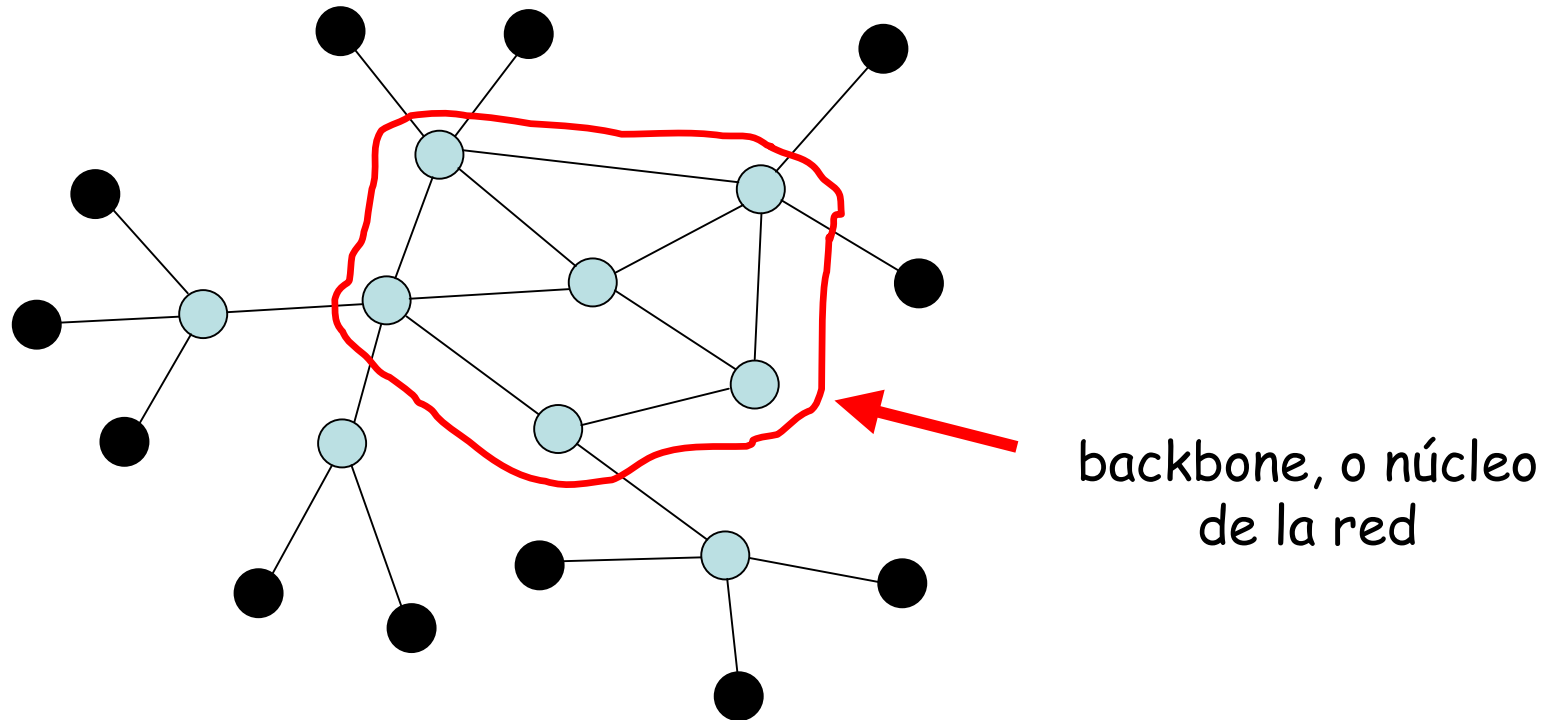
MODELO DE REFERENCIA

Una red de comunicaciones



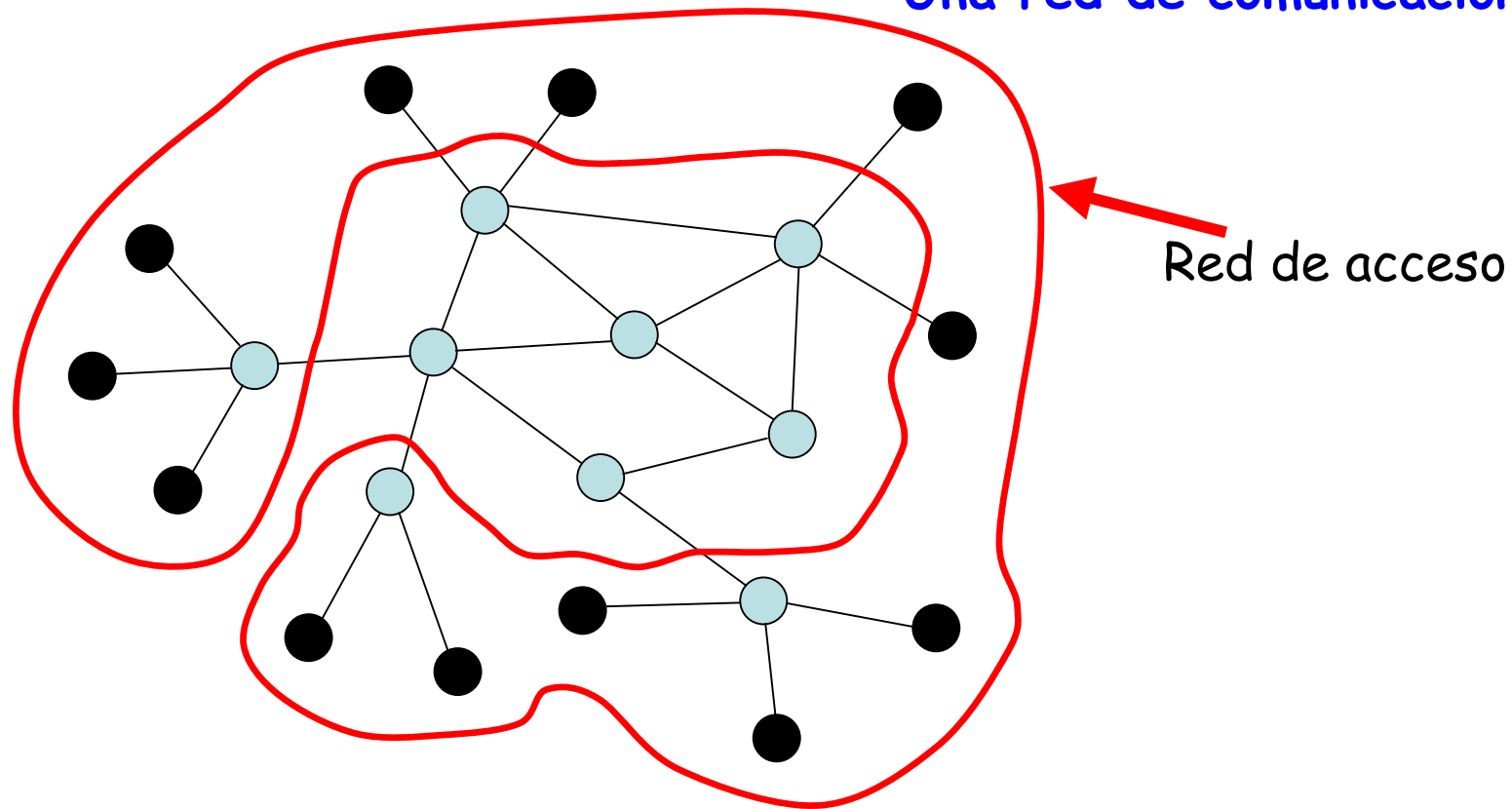
MODELO DE REFERENCIA

Una red de comunicaciones

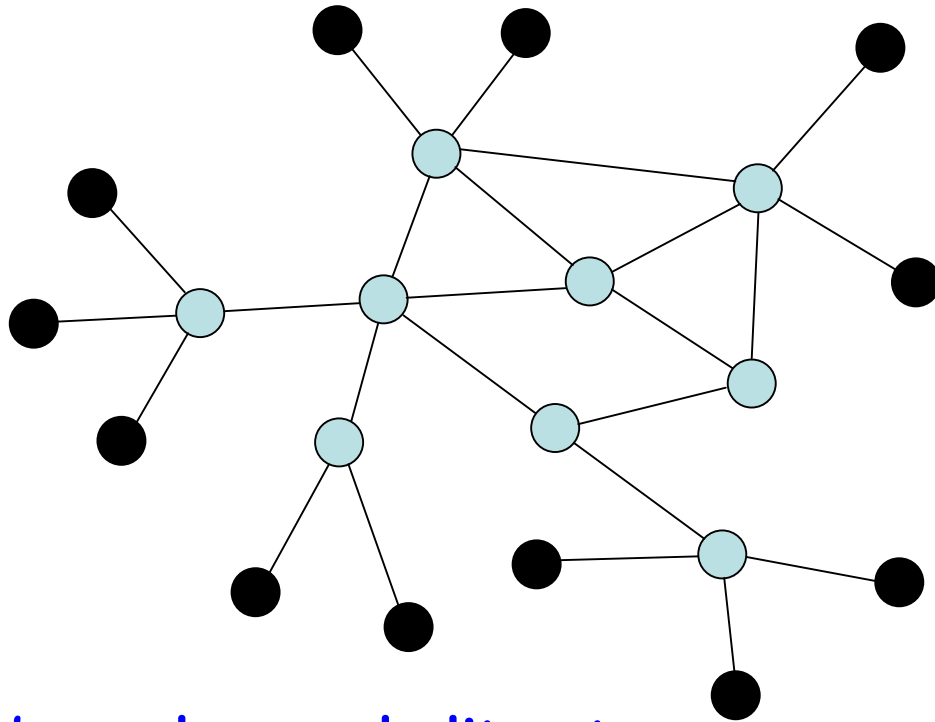


MODELO DE REFERENCIA

Una red de comunicaciones



MODELO DE REFERENCIA



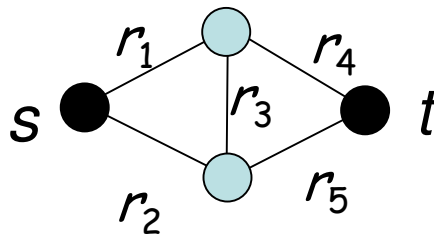
- nodos perfectos
- líneas independientes
- líneas están operacionales o no operacionales
- para cada línea i ,
 $r_i = \text{Pr}(\text{línea } i \text{ funciona})$

Palabras clave en la literatura:

- diagramas de confiabilidad, árboles de falla...
- teoría de grafos, estructuras binarias coherentes y no coherentes

MODELO MATEMÁTICO

- V : los nodos
 K : los *terminales*, $K \subseteq V$
 E : las *líneas* o aristas
 r_i : las *confiabilidades elementales*, $i \in E$
- $N = (V, E)$: el grafo no-dirigido subyacente
- Ejemplo sencillo: el grafo "puente", $K = \{s, t\}$



ESTRUCTURA ALEATORIA DEL MODELO

- Ω : conjunto de todos los subgrafos de N (mismos nodos, y parte de las aristas)
- $\mathcal{G} = (V, F)$: un grafo aleatorio en Ω ;
estructura de probabilidades:

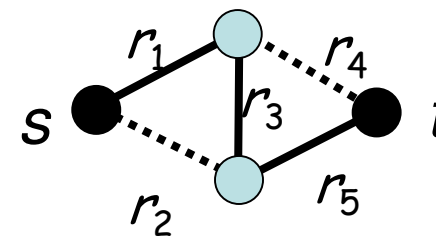
para cualquier $H \subseteq E$,

$$\Pr(\mathcal{G} = (V, H)) = \prod_{i \in H} r_i \prod_{j \notin H} (1 - r_j)$$

- Ejemplo: $H = \{1, 3, 5\}$,

$$\Pr(\mathcal{G} = (V, H)) =$$

$$r_1 r_3 r_5 (1 - r_2) (1 - r_4)$$



MÉTRICA

- Objetivo: $R = K$ -confiabilidad de la red,
= $\Pr(\text{nodos de } K \text{ están conectados})$
(equivalentemente
anti-confiabilidad $Q = 1 - R$).
- U : conjunto de todos los subgrafos de N
donde todos los nodos de K están
conectados; por lo tanto,
 $R = \Pr(G \in U)$.

REDUCCIONES SERIE-PARALELO

Reducción Serie: $R \left[\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{r_1} \circ \xrightarrow{r_2} \bullet \end{array} \right] = R \left[\bullet \xrightarrow{r_1 r_2} \bullet \right]$

$R \left[\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{r_1} \circ \xrightarrow{r_2} \circ \xrightarrow{r_3} \bullet \\ \circ \xrightarrow{r_4} \bullet \end{array} \right] = R \left[\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{r_1} \circ \xrightarrow{r_2 r_3} \circ \xrightarrow{r_4} \bullet \\ \bullet \xrightarrow{r_5} \bullet \end{array} \right]$

Reducción Paralelo: $R \left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} r_1 \text{---} \bullet \\ \text{---} r_2 \text{---} \end{array} \right] = R \left[\bullet \text{---} r_1+r_2-r_1 r_2 \text{---} \bullet \right]$

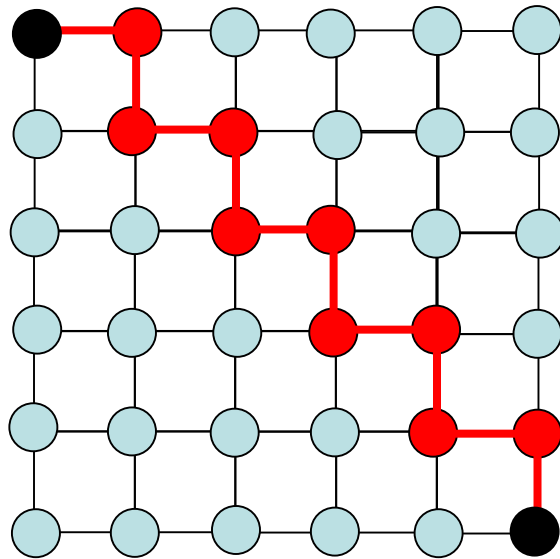
$$R \left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} r_1 \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} r_2 \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} r_3 \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} r_4 \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} r_5 \text{---} \bullet \end{array} \right] = R \left[\begin{array}{c} \bullet \text{---} r_1 \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} r_2 r_3 + r_4 - r_2 r_3 r_4 \text{---} \bullet \\ \bullet \text{---} r_5 \text{---} \bullet \end{array} \right]$$

$$R \left[\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{r_1} \circ \xrightarrow{r_2} \bullet \end{array} \right] = R \left[\bullet \xrightarrow{r_1 r_2} \bullet \right]$$

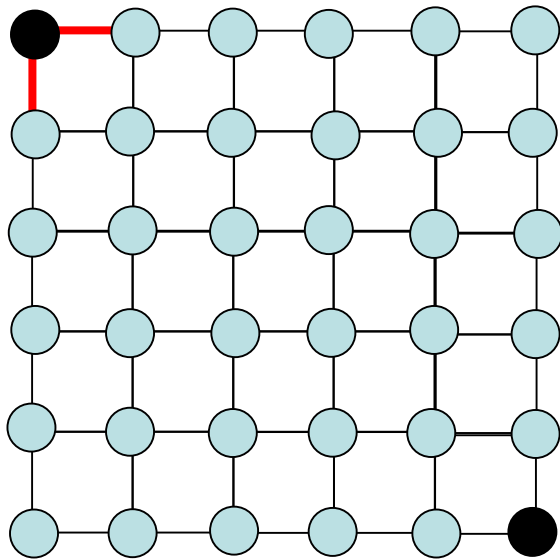
$$R \left[\begin{array}{c} \bullet \xrightarrow{r_1} \circ \xrightarrow{\quad} \circ \xrightarrow{r_5} \bullet \\ r_2 r_3 + r_4 - r_2 r_3 r_4 \end{array} \right] = r_1 (r_2 r_3 + r_4 - r_2 r_3 r_4) r_5$$

Las reducciones serie-paralelo tienen costo polinomial; no son aplicables siempre, por ejemplo, "Puente" no se puede reducir).

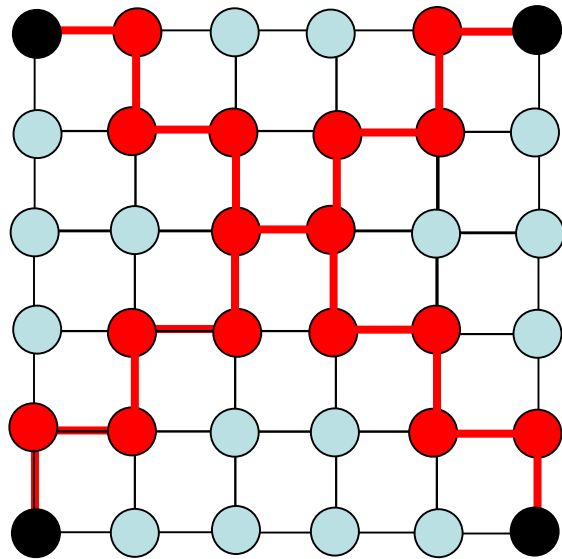
CONJUNTOS CAMINO Y CONJUNTOS CORTE



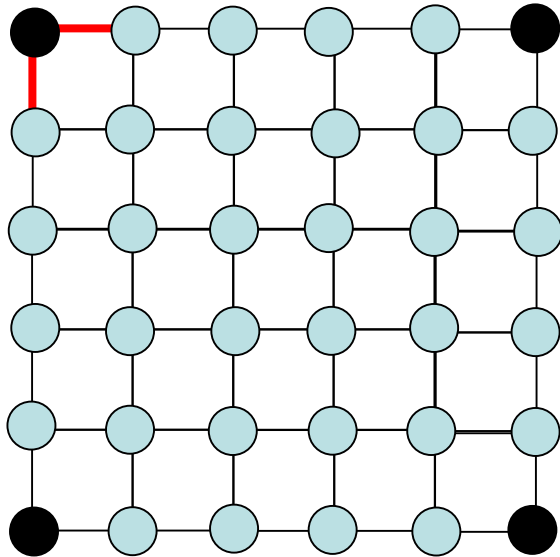
Un conjunto camino minimal
o *minpath* ($|K| = 2$)



Un conjunto de corte minimal
o *mincut* ($|K| = 2$)



Un minpath ($|K| = 4$)



Un mincut ($|K| = 4$)

- Sea P un minpath.
- Sea P -up el evento
 P -up = "todas las aristas de P funcionan",
 $\Pr(P\text{-up}) = \prod_{i \in P} r_i$
- Si se da el evento P -up \Rightarrow el sistema funciona,
 $\Pr(P\text{-up}) \leq R$

- Sea C un mincut.
- Sea C -down el evento
 C -down = "todas las aristas de C fallan",
 $\Pr(C\text{-down}) = \prod_{i \in C} (1 - r_i)$
- Si se da el evento C -down \Rightarrow el sistema falla,
 $\Pr(C\text{-down}) \leq Q = 1 - R$

MÉTODOS DE EVALUACIÓN

- Métodos exactos:
 - Diversas variantes; desde enumeración por fuerza bruta hasta ideas para aprovechar estructura probabilística o combinatoria.
 - Tiempo de cálculo no depende de confiabilidades elementales, pero sí del número de nodos y aristas.
 - Problema: polinomial para grafos serie-paralelo,
 - pero en el caso general $\#P$ -difícil.
 - Métodos conocidos de complejidad exponencial en número de aristas; adecuados para grafos pequeños; si $P \neq NP$, no existe método exacto eficiente.

MÉTODOS DE EVALUACIÓN

- Alternativa: evaluación aproximada empleando Simulación Monte Carlo.
 - Complejidad computacional crece de manera relativamente moderada con tamaño del grafo. (típicamente lineal o cuadrática).
 - Compromiso entre precisión y tiempo de cálculo.
 - Precisión depende de valores numéricos de las confiabilidades elementales - problema en el caso de confiabilidades muy pequeñas (caso de "eventos raros").

2 SIMULACIÓN MONTE CARLO ESTÁNDAR (CRUDA)

- $\#failed = 0$
- **for** $m = 1, 2, \dots, M$
 - $g = \text{sample}(G)$
 - **if** $g \notin U$ **then** $\#failed += 1$
- $Q^{std} = \#failed/M$
- $V^{std} = Q^{std} (1 - Q^{std}) / (M-1)$

- M - tamaño de muestra
- Q^{std} - estimador de la anti-confiabilidad
- V^{std} - estimador de la varianza de Q^{std}

COMPLEJIDAD COMPUTACIONAL

- Iteración del bucle interno: muestreo de un grafo (sortear estado de cada arista), y verificación si pertenece o no al conjunto U (búsqueda DFS); complejidad total de orden $O(|E|)$.
- Se realizan M iteraciones; tiempos de inicialización y cómputo final de $O(1)$.
- Tiempo de cómputo total de orden $O(M|E|)$, lineal en número de aristas y en número de replicaciones.

PRECISIÓN

- Estimación del error relativo del resultado se obtiene con la fórmula:

$$\begin{aligned}\text{RelErr} &= (V^{\text{std}})^{1/2} / Q^{\text{std}} \\ &= [(1 - Q^{\text{std}}) Q^{\text{std}} / (M-1)]^{1/2} / Q^{\text{std}} \\ &= [(1 - Q^{\text{std}}) / ((M-1) Q^{\text{std}})]^{1/2} \\ &\approx 1 / (M Q^{\text{std}})^{1/2}\end{aligned}$$

- Cuando $Q \ll 1$, error relativo crece, y si $Q \rightarrow 0$, $\text{RelErr} \rightarrow \infty$ (problema de los Eventos Raros).
- Error no depende del tamaño de la red, pero sí de confiabilidad de aristas; si son muy confiables, el estado de falla de la red es sumamente improbable (evento raro).

- Ventaja del método Monte Carlo: es posible mejorar precisión, aumentando el número de replicaciones. Para obtener error relativo $RelErr$, despejando M de la fórmula anterior, tenemos $M \approx 1/(Q(RelErr)^2)$.
- Tiempo de cálculo de orden $O(M |E|)$; para valores pequeños de Q o de $RelErr$, será eventualmente prohibitivo \Rightarrow motivación para desarrollar variantes que mejoren el comportamiento de Monte Carlo estándar ("Métodos de reducción de varianza").

MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE VARIANZA

- Métodos genéricos, aplicables a cualquier problema de simulación:
 - Muestreo según importancia (importance sampling); entropía cruzada (cross-entropy).
 - Variables antitéticas (antithetic variates).
 - Variables de control (control variates).
 - Muestreo estratificado (stratified sampling).
- Específicos para confiabilidad de redes:
 - Utilizan estructura y propiedades del problema de confiabilidad para disminuir varianza o tiempo de cálculo.
 - Muchas veces adaptan ideas de métodos genéricos de simulación y de métodos exactos.

- Diversas ideas y métodos en la literatura.
- Una clasificación grosera:
 - Basados en cotas del valor de la confiabilidad (muestreo en un sub-espacio de Ω , disminuye la varianza). Van Slyke y Frank/ Kumamoto, Tanaka e Inoue / Fishman.
 - Basados en muestreo antitético o generalización (mejora eficiencia de uso de números uniformes, y disminuye la varianza). Kumamoto, Tanaka e Inoue / Rubino y El Khadiri / Wei-Chang Yeh .
 - Basados en particionamientos del espacio Ω . , o en reformulación del problema en términos de otras variables aleatorias de menor varianza. Karp y Luby / Jun y Ross / Cancela y El Khadiri.

- Basados en modelos de evolución de grafos (procesos estocásticos), con uso de muestreo según importancia para disminuir la varianza. Wong e Easton / Elperin, Gertsbakh y Lomonosov.
Variantes basadas en Entropía cruzada para optimizar los parámetros de m.importancia. Hui, Bean, Kraetzl, y Kroese.
- Reformulaciones del método estándar para mejorar la eficiencia de cálculo. Rubino y El Khadiri.
- Veremos dos ejemplos concretos: "Reducción Recursiva de Varianza" y una reformulación del Monte Carlo estándar.

3 REDUCCIÓN RECURSIVA DE VARIANZA

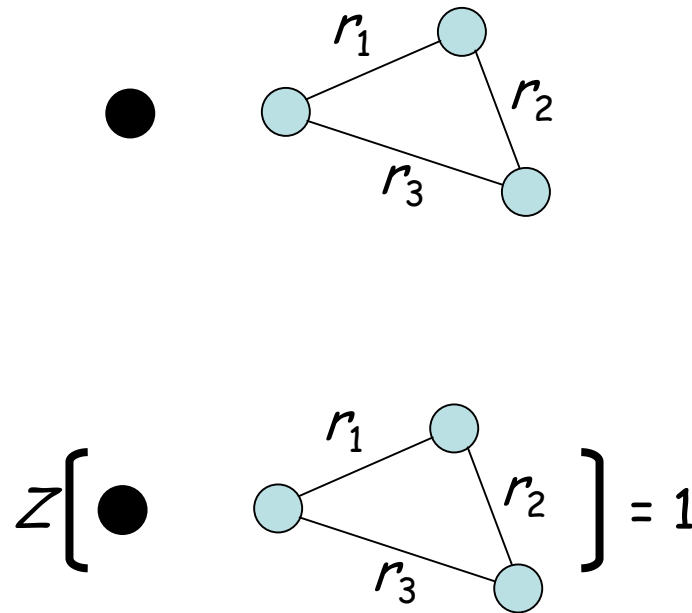
- Método de simulación para estimar confiabilidad de redes con mayor precisión que Monte Carlo estándar (C-, El Khadiri, Rubino).
- Ideas principales:
 - explotar estructura del problema.
 - Incluir cálculos exactos dentro del método Monte Carlo para mejorar la precisión y el tiempo.
- Más específicamente:
 - enfoque de descomposición recursiva
 - utilizando conceptos básicos; minpaths, mincuts
 - y aprovechando reducciones serie-paralelo.

- Sea P un minpath y P -up el evento "todas las aristas de P funcionan", podemos escribir

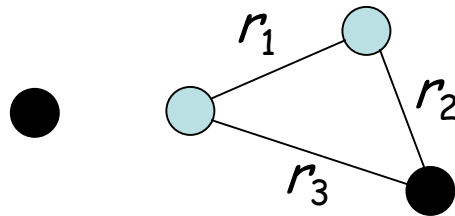
$$R = \Pr(P\text{-up}) + [1 - \Pr(P\text{-up})] \Pr(\text{sistema funciona} \mid \text{"al menos una arista de } P \text{ ha fallado"})$$
- Como es trivial calcular el término $\Pr(P\text{-up})$, la igualdad precedente sugiere muestrear un sistema condicional, para estimar el segundo término de la suma..
- Este muestreo condicional puede dar lugar a redes en las que se aplique reducciones series-paralelo.

- El método se define a través de un estimador Z (el estimador RVR) , cuya definición ilustramos a través de ejemplos:
 - Si la red tiene un único nodo terminal, por ejemplo si

- entonces



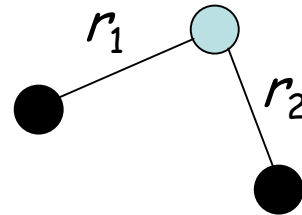
- Si la red tiene terminales en componentes conexas disjuntas, por ejemplo



- entonces

$$Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \text{triangle with } r_1, r_2, r_3 \text{ and } \bullet \end{array} \right] = 0$$

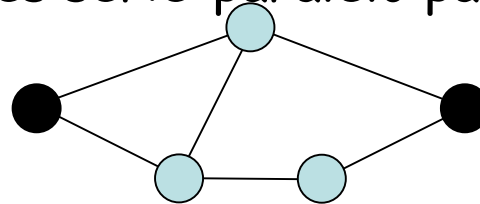
- Si la red es serie-paralelo reducible, por ejemplo



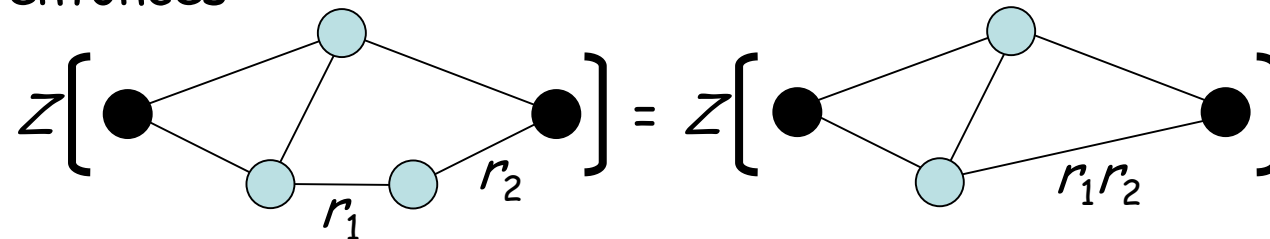
- entonces

$$Z \left[\begin{array}{c} \text{Diagram of a series-parallel reducible network} \\ \left(\text{black node} \text{ --- } r_1 \text{ --- } \text{light blue node} \text{ --- } r_2 \text{ --- } \text{black node} \right) \end{array} \right] = r_1 r_2$$

- Si hay reducciones serie-paralelo parciales, por ejemplo

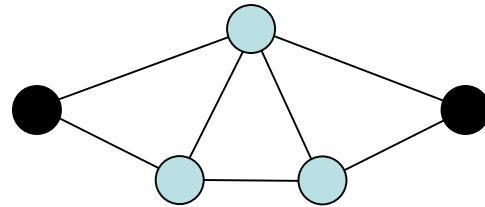


- entonces

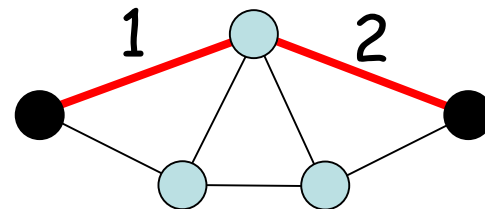


- Si ninguno de los casos precedentes aplica, entonces tenemos una red K -conexa, $|K| \geq 2$, y sin reducciones serie paralelo aplicables.

Sea N



Elegimos un minpath:



Sea L_i el evento "arista i funciona",
y sea \underline{L}_i el evento "arista i no funciona", $i = 1, 2$.

- Particionamos Ω de la manera siguiente:

$$\Omega = L_1L_2, \underline{L}_1, L_1\underline{L}_2$$

$$\text{Prob.} = r_1r_2$$

$$\text{Prob.} = 1 - r_1$$

$$\text{Prob.} = r_1(1 - r_2)$$

- Luego, definimos X v.a. auxiliar, que toma valores 2, 3 con probabilidades

$$\Pr(X=2) = (1 - r_1) / (1 - r_1r_2)$$

$$\Pr(X=3) = r_1(1 - r_2) / (1 - r_1r_2).$$

$$Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right] = r_1 r_2$$

$$\Omega = L_1 \underline{L}_2, \underline{L}_1, L_1 \underline{L}_2$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=2\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=3\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

Surge de la fórmula

$R = \Pr(P\text{-up}) + [1 - \Pr(P\text{-up})] \Pr(\text{sistema funciona} \mid \text{"al menos una arista de } P \text{ ha fallado"})$

desarrollando las distintas maneras en que puede fallar una arista de P .

$$Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right] = r_1 r_2$$

$$\Omega = L_1 L_2, \underline{L}_1, L_1 \underline{L}_2$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=2\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=3\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

para evaluar Z

$$Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right] = r_1 r_2$$

$$\Omega = L_1 L_2, \underline{L}_1, L_1 \underline{L}_2$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=2\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=3\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

para evaluar Z

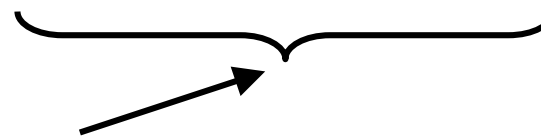
muestreamos X

$$Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right] = r_1 r_2$$

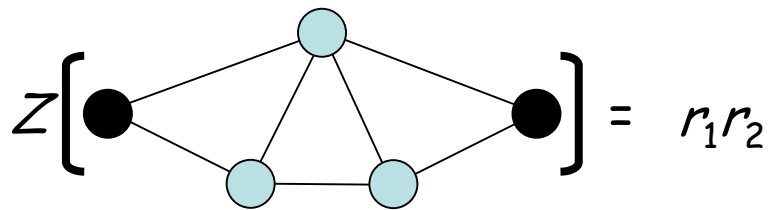
$$\Omega = L_1 L_2, \underline{L}_1, L_1 \underline{L}_2$$

$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=2\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$

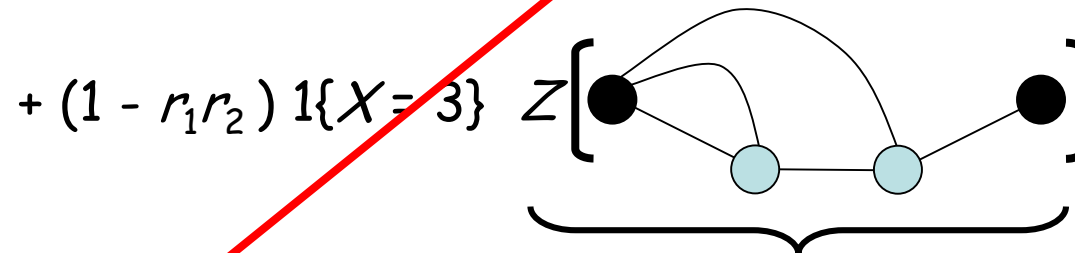
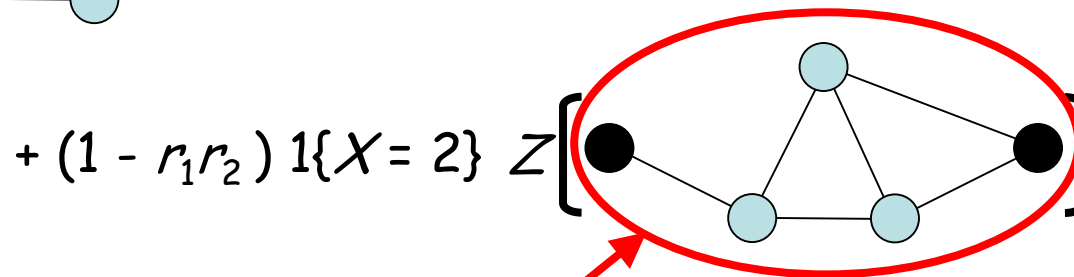
$$+ (1 - r_1 r_2) 1\{X=3\} Z \left[\begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \circ \quad \circ \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \right]$$



Si obtenemos valor 3 para X , tenemos una red serie-paralelo reducible, por lo tanto podemos hacer un cálculo exacto rápido.



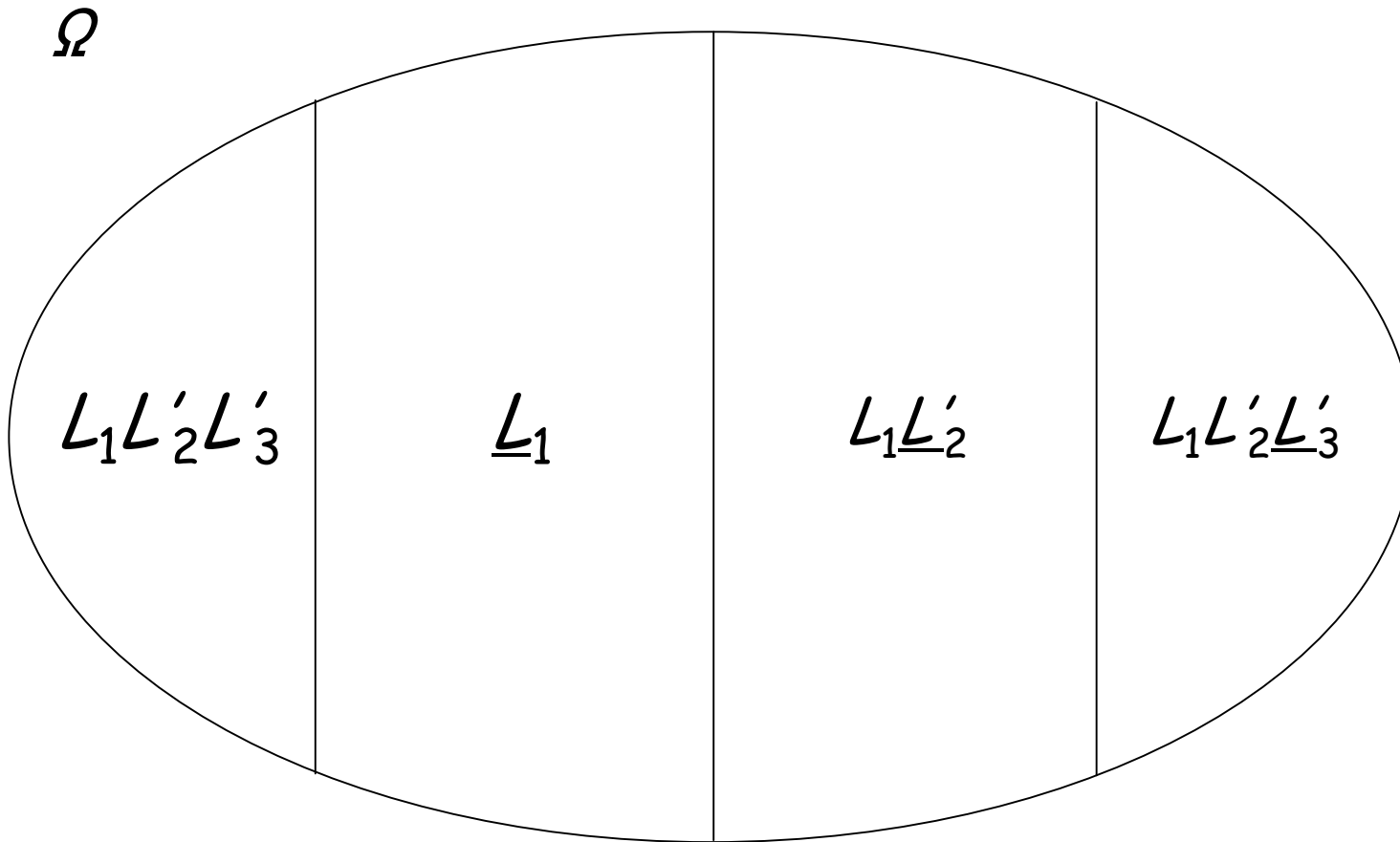
$$\Omega = L_1 L_2, \underline{L}_1, L_1 \underline{L}_2$$

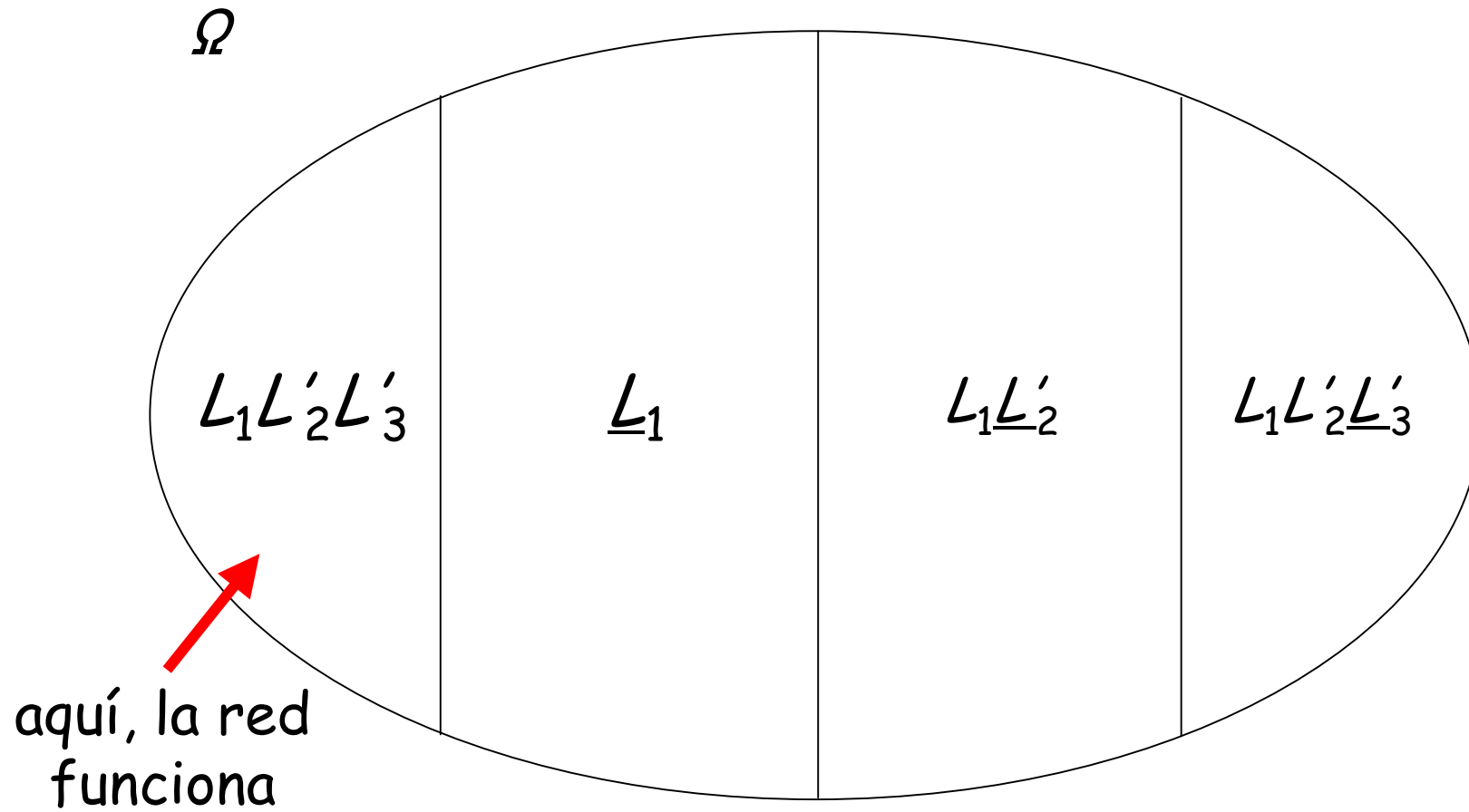


esta red es reducible serie-paralelo.

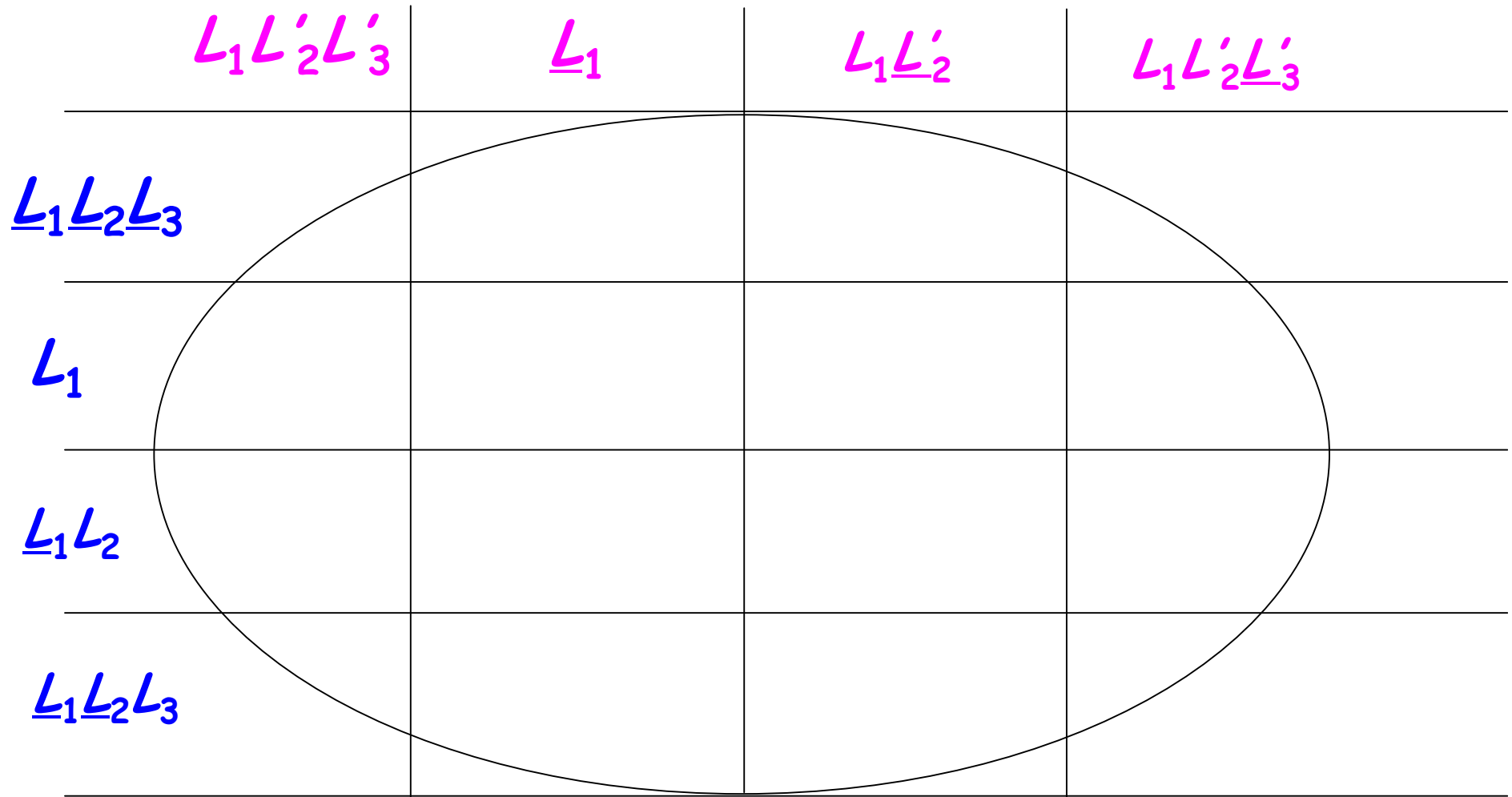
Si obtenemos valor 2, el procedimiento continua de manera recursiva a partir de esta red.

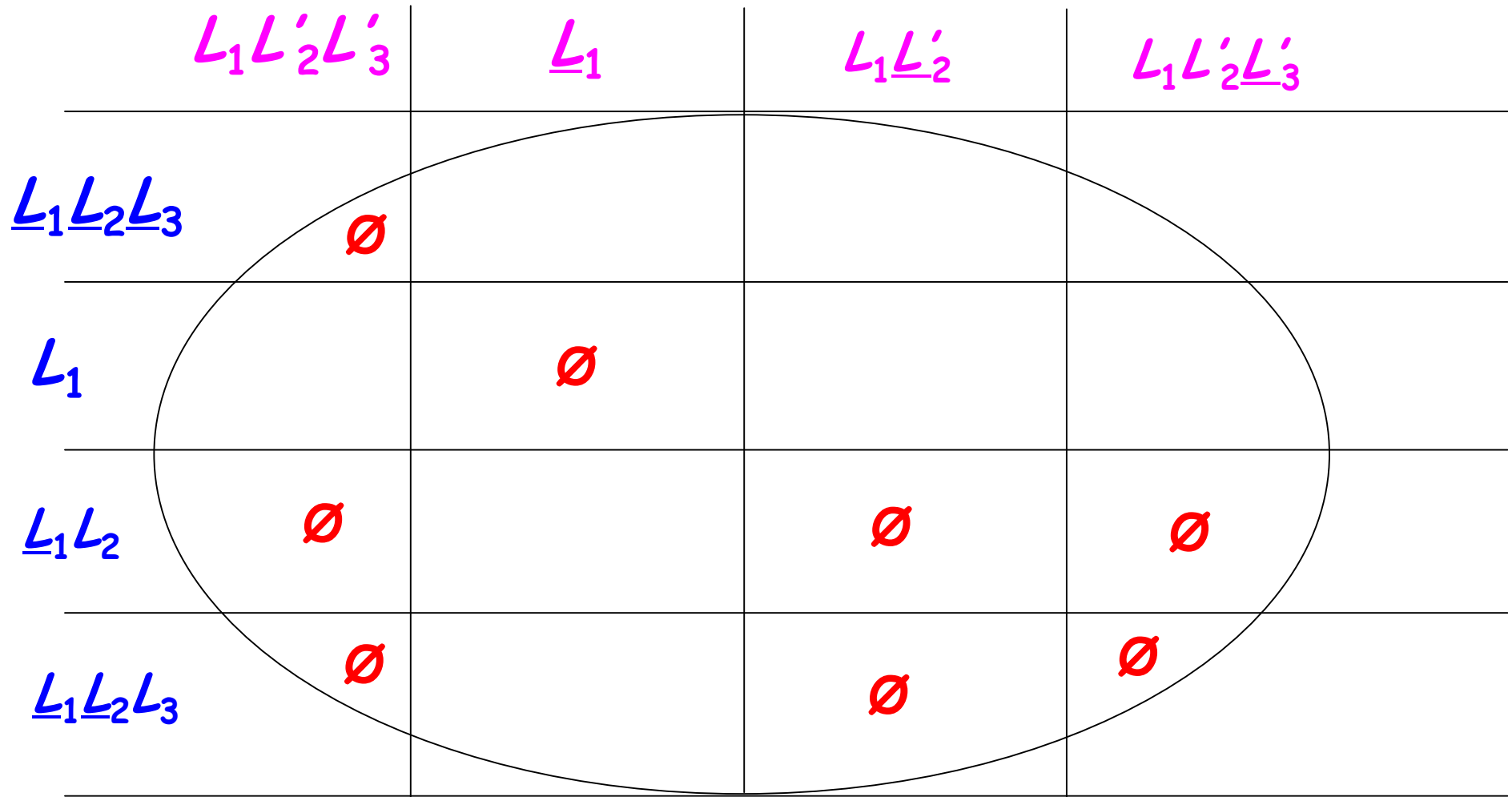
- Aplicamos la idea con un cutset $C = (I_1, I_2, I_3)$ y un pathset $P = (I_1, I'_2, I'_3)$, que comparten arista I_1 .
- Sea L_i (resp. L'_i) el evento "arista I_i funciona" ("arista I'_i funciona"), y sea \underline{L}_i (resp. \underline{L}'_i) el evento "arista I_i no funciona" ("arista I'_i no funciona").
- Particionamos primero Ω en los eventos $L_1L'_2L'_3, \underline{L}_1, L_1\underline{L}'_2, L_1L'_2\underline{L}'_3$, es decir, los eventos
 - "las tres aristas de P funcionan",
 - "la arista I_1 de P no funciona"
 - "en P , la arista I_1 funciona y la arista I'_2 no funciona"
 - "en P , aristas I_1 y I'_2 funcionan y arista I'_3 no funciona"





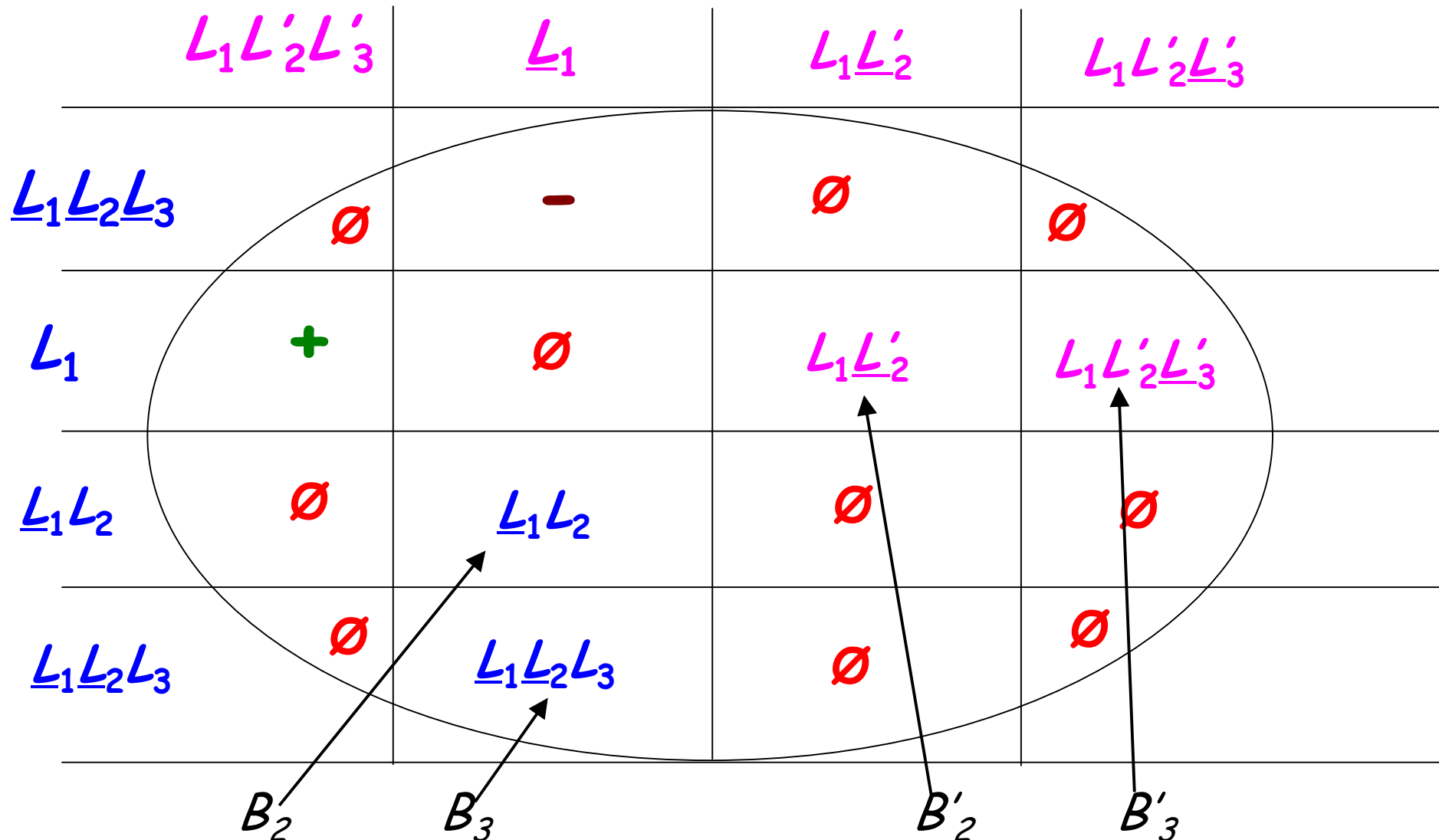
- Ahora, refinamos la partición cruzando la descomposición previa con la partición $\underline{L}_1\underline{L}_2\underline{L}_3, L_1, \underline{L}_1L_2, \underline{L}_1\underline{L}_2L_3$, generada usando el mincut \mathcal{C} .

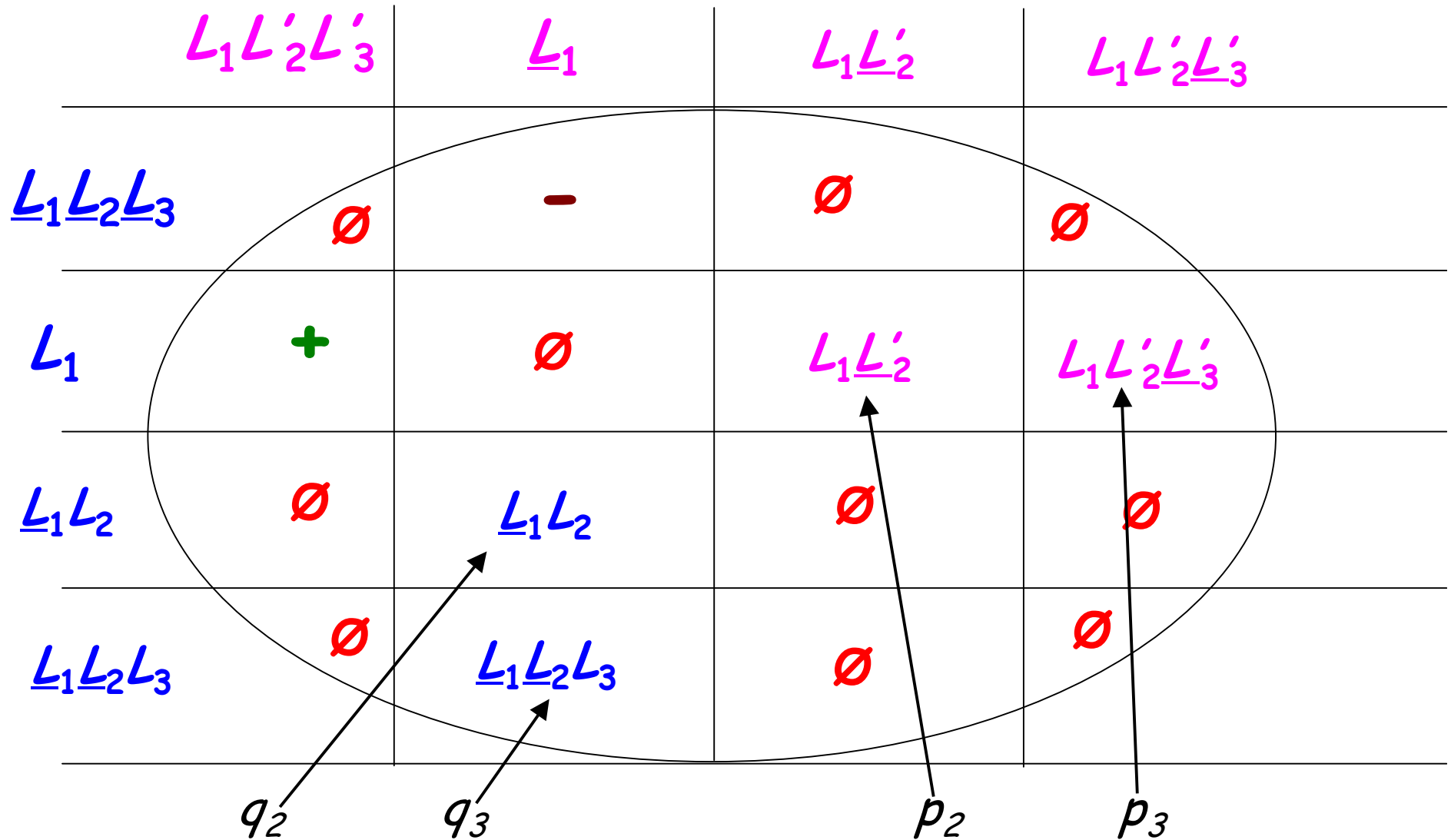




	$L_1 L'_2 L'_3$	L_1	$L_1 L'_2$	$L_1 L'_2 L'_3$
$L_1 L_2 L_3$	\emptyset	-	\emptyset	\emptyset
L_1	+	\emptyset		
$L_1 L_2$	\emptyset		\emptyset	\emptyset
$L_1 L_2 L_3$	\emptyset		\emptyset	\emptyset

	$L_1 L'_2 L'_3$	L_1	$L_1 L'_2$	$L_1 L'_2 L'_3$
$L_1 L_2 L_3$	\emptyset	-	\emptyset	\emptyset
L_1	+	\emptyset	$L_1 L'_2$	$L_1 L'_2 L'_3$
$L_1 L_2$	\emptyset	$L_1 L_2$	\emptyset	\emptyset
$L_1 L_2 L_3$	\emptyset	$L_1 L_2 L_3$	\emptyset	\emptyset





Formulación

- Si $|K|=1$ o G no K conexo o G sp reducible
 $Z(G) = R(G)$

- Sino

$$Z(G) = \prod_{i \in P} r_i + (1 - \prod_{i \in P} r_i - \prod_{i \in C} (1 - r_i)) Z(G_Y)$$

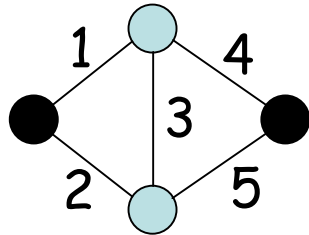
donde G_Y toma valores en $\underline{L}_1 \underline{L}_2$, $\underline{L}_1 \underline{L}_2 \underline{L}_3$,
 $\underline{L}_1 \underline{L}'_2$, $\underline{L}_1 \underline{L}'_2 \underline{L}'_3$, etc, con probabilidad
proporcional a dichos subespacios.

ALGORITMO

- $sum = 0.0$
- **for** $m = 1, 2, \dots, M$
 - $z = \text{sample}(Z)$
 - $sum += z$
- $R^{re} = sum/M$

- Observación: las únicas v.a. muestreadas son las Y (para elegir los grafos G_Y en cada etapa en que hay un grafo irreducible y no trivial encontrado en el proceso recursivo).
- TEOREMA
 - $E(Z) = R$ (estimador insesgado)
 - $Var(Z) \leq [R - Pr(P\text{-up})][Q - Pr(C\text{-down})] \leq RQ$ (reducción de varianza respecto a Monte Carlo crudo).

EJEMPLO: PUENTE



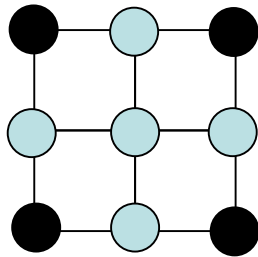
$M = 10^6$ muestras

- $r_1 = 1 - \exp(-1/0.3) \sim 0.964326$
 - $r_2 = 1 - \exp(-1/0.1) \sim 0.999955$
 - $r_3 = 1 - \exp(-1/0.8) \sim 0.713495$
 - $r_4 = 1 - \exp(-1/0.1) \sim 0.999955$
 - $r_5 = 1 - \exp(-1/0.2) \sim 0.993262$
- $R \sim 0.999929, Q \sim 7.1 \times 10^{-5}$

$\text{Var}(Q^{\text{std}})/\text{Var}'(Q^{\text{re}}) \sim 1.95 \times 10^6$ $\text{Var}'(Q^x)$ es la varianza estimada del estimador x de Q siendo considerado;

$\text{Var}(Q^{\text{std}})/\text{Var}'(Q^{\text{re}}) =$ "reducción de varianza obtenida por el método RE en relación al STD"

EJEMPLO: la grilla 3x3

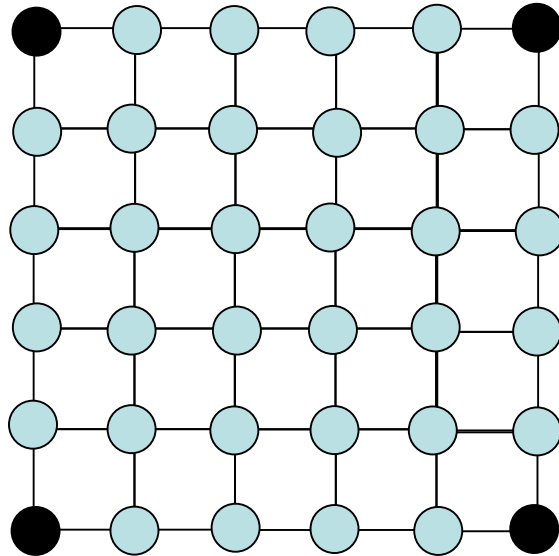


$$\begin{aligned} |V| &= 9, \\ |K| &= 4, \\ |E| &= 12 \end{aligned}$$

$M = 10^6$ muestras

$q_i = 1 - r_i$	Q	$\text{Var}(Q^{\text{std}}) / \text{Var}'(Q^{\text{re}})$
10^{-3}	$\sim 4.00 \times 10^{-12}$	$\sim 4.49 \times 10^5$
10^{-6}	$\sim 4.00 \times 10^{-18}$	$\sim 4.44 \times 10^{11}$

EJEMPLO: la grilla 6x6



$$\begin{aligned} |V| &= 36, \\ |K| &= 4, \\ |E| &= 60 \end{aligned}$$

$M = 10^6$ muestras

q_i	Q	$\text{Var}(Q^{\text{std}}) / \text{Var}'(Q^{\text{re}})$
10^{-3}	$\sim 4.01 \times 10^{-6}$	$\sim 1.13 \times 10^5$
10^{-6}	$\sim 4.00 \times 10^{-12}$	$\sim 1.11 \times 10^{11}$

4 FORMULACIÓN ALTERNATIVA DE MONTE CARLO ESTÁNDAR

- Objetivo: reformular método estándar, sin cambiar la varianza, pero disminuyendo costo de muestreo (El Khadiri y Rubino, IRISA, Francia).

- $\#failed = 0$
- **for** $m = 1, 2, \dots, M$
 - $g = \text{sample}(G)$
 - **if** $g \notin U$ **then** $\#failed += 1$
- $Q^{std} = \#failed/M$
- $V^{std} = Q^{std} (1 - Q^{std}) / (M-1)$

- Observación: sea un conjunto $T = (P_1, P_2, \dots, P_H)$ de minpaths disjuntos (que no comparten aristas); sólo interesan muestras en las que todos los minpaths de T tendrán al menos una arista fallada (condición necesaria, aunque no suficiente, para $g \notin U$).

- $T = (P_1, P_2, \dots, P_H)$ conjunto de minpaths.
 $p_h = \prod_{i \in P_h} r_i$ probabilidad de funcionamiento del minpath P_h (es decir, que todas sus aristas funcionen).
 $q = \prod_{h=1..H} (1-p_h)$ probabilidad de que en una muestra de G , todos los minpaths tengan al menos una arista fallada (distribución Bernoulli, parám. q).
 $(1-q)$ probabilidad que al menos algún minpath funcione.

- Si generamos muestras de G independientes, habrá secuencias de largo F (aleatorio) de muestras tales que algún minpath funciona.
- F tiene distribución geométrica de parámetro $1-q$,
 $\Pr(F=n)=(1-q)^{n-1}q$.
- En lugar de generar estas muestras, se sortea F .
- Las muestras tales que todos los minpaths fallan, se sortean con un muestreo condicional (con costo computacional lineal en el número de aristas).

NUEVA FORMULACIÓN

- Las estimaciones Q^{std} y V^{std} coinciden con las del método estándar.
- Esperanza de $\text{Geo}(1-q)$ es $1/q$; el loop interno se ejecuta en promedio Mq veces.
- El costo de cada iteración del loop es $O(|E|)$
- El costo total es linealmente proporcional a $Mq|E|$; el costo de la formulación clásica es $M|E|$, independiente de las confiabilidades de las aristas.

- $\#failed = 0$
- $m = 0$
- **loop**
 - $m = m + \text{Geo}(q)$
 - **exit if** $m > M$
 - $g = \text{sample-conditional}(G)$
 - **if** $g \notin U$ **then** $\#failed += 1$
- $Q^{\text{std}} = \#failed / M$
- $V^{\text{std}} = Q^{\text{std}} (1 - Q^{\text{std}}) / (M - 1)$

- En casos de alta confiabilidad, los $p_h = \prod_{i \in P_h} r_i$ son cercanos a 1, y $q = \prod_{h=1..H} (1 - p_h)$ cercana a 0; importante ganancia en tiempo.

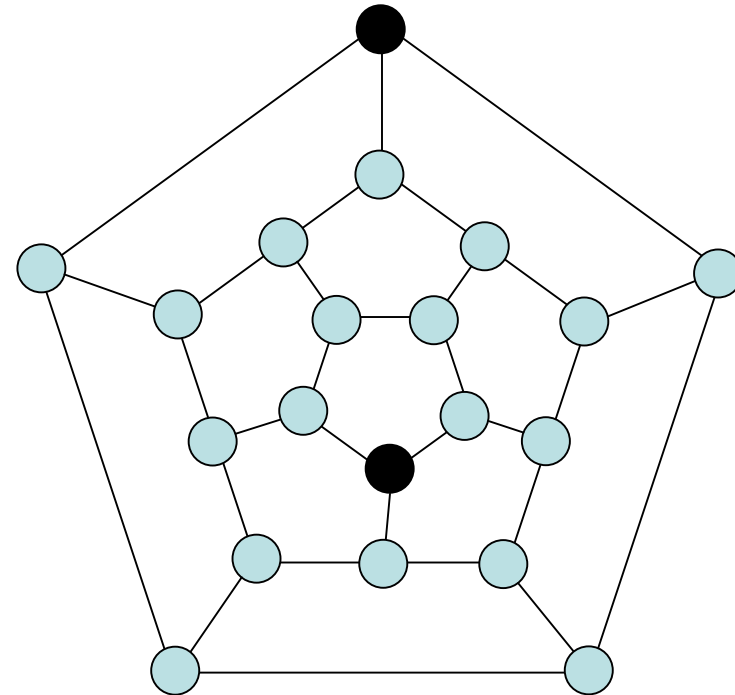
EJEMPLO NUMÉRICO

Topología "Dodecaedro".

Dos nodos terminales.

Confiabilidad elemental de las aristas r .

r	Q	$T(Q^{std})/T(Q^{mod})$
.9	2.87×10^{-3}	18.9
.95	2.95×10^{-4}	188
.98	1.70×10^{-5}	3800



$T(Q^x)$ es el tiempo de cálculo para calcular el estimador x de Q ;

$T(Q^{std})/T(Q^{mod})$ = reducción en el tiempo de cálculo insumido por el método modificado en relación al estándar (para M fijo)

5 COMO ELEGIR/COMPARAR DIVERSOS MÉTODOS

- Estudios experimentales (empíricos).
- Estudio de propiedades teóricas y de comportamiento asintótico.

Estudios experimentales (empíricos)

- Conjunto de casos de estudio; diversas topologías, diversas confiabilidades.
- Problemas:
 - falta de una biblioteca de casos de prueba estandarizada,
 - implementaciones de diversos métodos no disponibles,
 - resultados en la literatura que sólo indican varianzas pero no tiempos de cómputo,
 - dificultad de normalizar tiempos de cálculo en computadores distintos.

- Indicadores de desempeño de un método x :
 - Varianza $\text{Var}(Q^x)$, para un número de iteraciones fijo M , o para un tiempo T .
 - Tiempo de cálculo $T(Q^m)$, para un número de iteraciones fijo M , o para obtener una precisión pre-determinada.
 - Comparación contra el método base, Monte Carlo estándar.

- Comparación de dos métodos - cual es la "aceleración" de x respecto a y ?
 - Algunos trabajos: fijar nro. de iteraciones M , calcular $\text{Var}(Q^y) / \text{Var}(Q^x)$. Problema: no considera los tiempos de cálculo por iteración.
 - Otra manera (más justa):
 - fijar una precisión predeterminada,
 - ejecutar ambos métodos hasta alcanzar esa precisión
 - calcular $T(Q^y) / T(Q^x)$.
 - Problema: si la diferencia de tiempos es de varios órdenes de magnitud, implica tiempos de cómputo excesivos (por ejemplo, si $T(Q^y) / T(Q^x) = 10^9$, y $T(Q^x) = 1$ seg, $T(Q^y) = 31$ años).

- Mejor alternativa
 - Eficiencia relativa $\text{Var}(Q^y)T(Q^y)/\text{Var}(Q^x)T(Q^x)$.
 - Interpretación:
si $\text{Var}(Q^y)T(Q^y)/\text{Var}(Q^x)T(Q^x) = W$, entonces podemos decir que "el método x es W veces más rápido que el método y " (es decir, obtiene la misma precisión en W veces menos tiempo).
 - Alternativamente, para un tiempo de cálculo dado, el método x obtiene una varianza W veces menor que el método y.

Ejemplo estudio empírico

- Comparación diversos métodos, grafo Dodecaedro.
 $\text{Var}(Q^{\text{std}}) / \text{Var}(Q^x)$ para 7 métodos distintos,
 M fijo = 10^6 .

r	RVR	Total hazard	Std. modif.	Seq. constr.	Bounds	Failure sets	Merge proc.
.50	26.8	0.74	1	2.70	2.35	0.21	2.80
.90	1046	44.1	1	5.25	50.2	6980	37.1
.95	12120	324	1	11.43	594	437000	246



- $\text{Var}(Q^{\text{std}})T(Q^{\text{std}})/\text{Var}(Q^{\times})T(Q^{\times})$

r	RVR	Total hazard	Std. modif	Seq. constr.	Bounds	Failure sets	Merge proc.
.50	54.6	0.11	1.56	0.68	0.56	0.05	0.67
.90	2040	6.63	18.9	1.40	12.3	70.3	8.80
.95	25100	50.1	188	2.71	136	3714	55.7



Estudios teóricos

- Cálculo teórico de la varianza, o de una cota superior de la misma que demuestre mayor precisión en relación al método estándar.
- Cálculo de la complejidad computacional (pertenencia a la clase FPRAS, Fully Polynomial Randomized Approximation Schemes).
- Estudio de propiedades asintóticas:
 - Error relativo acotado.
 - Aproximación normal acotada.
 - Eficiencia relativa acotada.

Error relativo acotado

- Marco formal:
 - ε parámetro de "rareza"
 - Confiabilidad de aristas: $r_i = 1 - a_i \varepsilon^{b_i}$
 - $Q(\varepsilon) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
 - Error relativo del método x : $\text{RelErr} = (V^x)^{1/2} / Q$
- Definición:
 x verifica "Error relativo acotado" ssi para todo grafo G , y todo M fijo, existe valor E tal que $(V^x)^{1/2} / Q < E$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Interpretación: dada una topología y un M , la precisión del método x no depende de ε .

Aproximación normal acotada

- Definición:
x verifica "Aproximación normal acotada" ssi para todo grafo G , la diferencia entre la distribución del estimador Q^x y una distribución normal está acotada cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (esta condición se formula en base al momento tercero de Q^x y la varianza, por el teorema de Berry-Essen).
- Interpretación: utilizando Q^x y V^x es posible construir un intervalo de confianza basado en ley normal, válido independ. de ε .

Eficiencia relativa acotada

- Definición:
x verifica "Eficiencia relativo acotada" ssi para todo grafo G , y todo M fijo, existe valor E tal que $Q^2 / (V^x T^x) > E$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- Interpretación: dada una topología, es posible obtener la misma precisión en el mismo tiempo de cálculo aun cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ (el método es robusto frente a "eventos raros").

Eficiencia relativa acotada

- Volviendo al estimador estándar modificado, $\text{RelErr} = (V^x)^{1/2} / Q = (Q(1-Q)/M)^{1/2} / Q = (1-Q)^{1/2} / (QM)^{1/2}$ no acotado cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, no verifica Error relativo acotado.
- Sin embargo, hay una condición suficiente para Eficiencia relativa acotada:
 - sea $T = (P_1, P_2, \dots, P_H)$ el conjunto de minpaths usados para formular el estimador,
 - sea b_h orden de arista más confiable de cada h ,
 - sea r el orden de Q ,
 - (teorema) si $\sum_h b_h \geq r$, entonces se cumple eficiencia relativa acotada.



CONCLUSIONES

- El Método Monte Carlo estándar es muy sencillo y fácil de implementar, pero tiene limitaciones cuando las redes son altamente confiables, o se necesita un error relativo muy pequeño.
- Para mejorar su eficiencia, hay dos caminos posibles (complementarios):
 - reducir la varianza por iteración;
 - reducir el tiempo de cálculo por iteración.
- Para esto, es preciso utilizar propiedades ligadas al muestreo o a la estructura combinatoria del problema de confiabilidad.

- Existen algunos resultados teóricos que estudian propiedades deseables del comportamiento de los métodos, pero en la mayoría de los casos estas no han podido ser probadas.
- Los resultados experimentales de estos métodos pueden ser muchos órdenes de magnitud mejor que los de Monte Carlo estándar; el diseño y elección de métodos es aún hoy más un "arte" que una ciencia.

OTRAS LÍNEAS ACTUALES DE INVESTIGACIÓN VINCULADA

- Variantes de modelo básico:
 - nodos con fallas,
 - aristas/nodos con capacidades,
 - aristas/nodos con múltiples estados,
 - modelos con costos.
- Aplicaciones a problemas de optimización:
 - diseño de topología,
 - selección de componentes,
 - optimización multiobjetivo con otras medidas de vulnerabilidad, performance (capacidad, demora), costo.

Algunas publicaciones recientes

- Hui, K-P., Bean, N, Kraetzl, M and Kroese, D.P. (2005). The Cross-Entropy Method for Network Reliability Estimation. *Annals of Operations Research*, 134 (1), 101--118.
- Cancela, H., Tuffin, B. And Rubino, G. (2005). New measures of robustness in rare event simulation. *Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference*. M.E. Kuhl, N.M. Steiger, F.B. Armstrong, J.A. Joines, eds., pp. 519 - 527.
- Cancela, H. and El Khadiri, M. (2003). On the RVR Simulation Algorithm for Network Reliability Evaluation. *IEEE Tr. on Reliability* vol.52, no. 2, pp. 207-212.
- Hui, K-P., Bean, N., Kraetzl, M. and Kroese, D.P. (2003). The Tree Cut and Merge Algorithm for Estimation of Network Reliability. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 17 23-45.
- Wei-Chang Yeh (2002). A New Monte Carlo Method for the Network Reliability. *International Conference on Information Technology and Applications 2002 (ICITA2002)*
- Cancela H. and Urquhart, M.E. (2002). RVR simulation techniques for residual connectedness network reliability evaluation. *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 51:4, pp. 439-443.



Período 1990-2000

- Cancela H. and El Khadiri M. (1998). Series-parallel reductions in Monte Carlo network reliability evaluation. *IEEE Transactions on Reliability*, 47(2):159--164.
- El Khadiri, M. and Rubino, G. (1996). An efficient formulation of the standard Monte Carlo simulation of binary systems reliability. In *2nd Int. Conf. on Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods*.
- Cancela, H. and El Khadiri, M. (1996). An improvement to the total hazard method for system reliability simulation. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 10(2):187--196.
- Lomonosov, M. (1994). On Monte Carlo Estimates in Network Reliability. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 8:245-264.
- Ross, S.M. (1994). A new simulation estimator of system reliability. *Journal of App.Mathematics and Stochastic Analysis*, 7(4):331-336.
- C.H. Jun and S.M. Ross (1992). System Reliability by Simulation: Random Hazards Versus Importance Sampling. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 6:119-126.
- Elperin, T. Gertsbakh, I. and Lomonosov, M. (1991). Estimation of network reliability using graph evolution models. *IEEE Transactions on Reliability* 40(5):572-581.



Período anterior a 1990

- G. S. Fishman (1986). A comparison of four Monte-Carlo methods for estimating the probability of s-t connectedness. *IEEE Trans. On Reliability*, 35(2):145-155.
- G.S. Fishman (1986), A Monte Carlo sampling plan for estimating network reliability, *Operational Research*, 34:581-594.
- G.S. Fishman, (1986). A Comparison of Four Monte-Carlo Methods for Estimating the Probability of s-t Connectedness, *IEEE Trans. Reliab. R-35(2):145-155*.
- R. Karp and M.G. Luby (1985), Monte-Carlo Algorithms for the Planar Multiterminal Network Reliability Problem, *Journal of Complexity*, 1:45-64
- H. Kumamoto and K. Tanaka and K. Inoue and E.J. Henley (1980). Dagger-Sampling Monte Carlo for System Unavailability Evaluation, *IEEE Trans. Reliab.,R-29(2): 122-125*.
- Easton, M.C. And Wong, C.K (1980). Sequential destruction methods for Monte Carlo evaluation of system reliability. *IEEE Trans. Reliab* 29:27-32.
- H. Kumamoto and K. Tanaka and K. Inoue(1977). Efficient Evaluation of System Reliability by Monte Carlo Method, *IEEE Trans. on Reliab.* 26(5): 311-315,



