

# Modelos Combinatorios de Confiabilidad en Redes.

Dr. Ing. Franco Robledo (Responsable del Curso)  
IMERL/Dpto. de Investigación Operativa (INCO) - UDELAR  
Montevideo, Uruguay.

Curso de Postgrado, marzo de 2009

Facultad de Ingeniería - UDELAR

CUARTO SET DE TRANSPARENCIAS.

## Métodos de Reducción de Varianza

- La estructura de base de éstas técnicas es similar a la de Monte Carlo Crudo. En genérico tendríamos:

```
Inicialización  $\mathcal{I}$ :  $S_1 = 0$ ;  $S_2 = 0$ ;  
Para  $n = 1, \dots, N$  hacer  
  Ejecutar  $M(G, K)$ ; (devuelve  $R$ )  
   $S_1 = S_1 + R$ ;  $S_2 = S_2 + R^2$   
fin_para;  
Estimar  $R_K$ :  $\hat{R} = S_1/N$ ;  
Estimar  $Var(R_K)$ :  $\hat{V} = \frac{S_2 - S_1^2/N}{N(N-1)}$ ;
```

- Es decir, primero se ejecuta un procedimiento de inicialización  $\mathcal{I}$ ; luego se ejecuta  $N$  veces un procedimiento  $M()$  y se acumulan sus resultados; por último se estiman  $R_K$  y  $Var(R_K)$ .

## Métodos de Reducción de Varianza

- Cada método tendrá que incorporar a este esquema sus propios procedimientos de inicialización  $\mathcal{I}$  (que puede ser vacía) y de obtención de muestras  $M()$ , ésta última debe generar un valor aleatorio correspondiente a una variable de media  $R_K$ , lo que permitirá afirmar que el estimador no posee sesgo.
- Si además su varianza es menor que la correspondiente al método Monte Carlo Crudo, diremos que es más preciso que éste.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Basado en Cotas

- Veremos su aplicación para el cálculo de  $R_K(G)$  ( $K$ -terminal-reliability).
- Puede ser aplicada a cualquier problema de evaluación de la confiabilidad en el cual se conozcan para la función  $\Phi$  de estructura del sistema dos funciones  $\Phi^L$  y  $\Phi^U$  que la acotan inferior y superiormente en forma respectiva. Estas funciones deben cumplir las propiedades:
  - $\Phi^L(X) \leq \Phi(X) \leq \Phi^U(X)$  para todo vector de estado  $X$ .
  - Para  $k = 0, \dots, |E|$  y para cualquier asignación de valores  $\tilde{X}^{(k)} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k)$  para los primeros  $k$  componentes de  $X$ , los valores:  $R_k^L(\tilde{X}^{(k)}) = P(\Phi^L(X) = 1 | x_1 = \tilde{x}_1, \dots, x_k = \tilde{x}_k)$  y  $R_k^U(\tilde{X}^{(k)}) = P(\Phi^U(X) = 1 | x_1 = \tilde{x}_1, \dots, x_k = \tilde{x}_k)$  pueden ser calculados en tiempo polinomial.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Basado en Cotas

- Los valores  $R_0^L$  y  $1 - R_0^U$  son la probabilidades de un par de eventos conocidos en los cuales la función de estructura  $\Phi$  tiene valores conocidos (respectivamente 1 y 0), es decir,  $R_0^L = P(\Phi^L(X) = 1)$  y  $R_0^U = P(\Phi^U(X) = 1)$ .
- Para el muestreo basado en cotas, se define el espacio sobrante:  $W = \{X : \Phi^L(X) = 0, \Phi^U(X) = 1\}$ , de donde se extraerán las muestras en proporción a su probabilidad en el espacio original. A partir del estimador obtenido allí y la información anterior se reconstruye un estimador de la confiabilidad del sistema. La reducción de varianza es directamente proporcional a la fracción de la probabilidad total que queda incluida en el espacio  $W$ .

# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Basado en Cotas

**Muestreo Basado en Cotas;**  
**Input:**  $G = (V, E)$ ,  $K \subseteq V$ ,  $\Phi^L$ , y  $\Phi^U$ ;  
**Output:** un valor de  $R$ ;

**Rutina  $M()$ :**

**Tomar una muestra**  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{|E|})$ ;

**Calcular**  $R = R_0^L + \Phi(\tilde{X}) \cdot (R_0^U - R_0^L)$

**Retornar**  $R$ ;

**fin;**

Figure 1: Rutina  $M()$  del Muestreo Basado en Cotas.

- La muestra  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{|E|})$  se toma mediante el sorteo sucesivo, para  $l = 1, \dots, |E|$ , del estado  $\tilde{x}_l$  de la arista  $l$  según la probabilidad de funcionamiento dada por:

## Métodos de Reducción de Varianza

### Muestreo Basado en Cotas

$$\begin{aligned}\tilde{p}_l &= P(x_l = 1 | x_1 = \tilde{x}_1, \dots, x_{l-1} = \tilde{x}_{l-1} \text{ y } \Phi^U(\tilde{X}) = 1, \Phi^L(\tilde{X}) = 0) \\ &= \left[ \frac{R_l^U(\tilde{X}^{(l-1)}, 1) - R_l^L(\tilde{X}^{(l-1)}, 1)}{R_{l-1}^U(\tilde{X}^{(l-1)}) - R_{l-1}^L(\tilde{X}^{(l-1)})} \right] \cdot p_l.\end{aligned}$$

La varianza por muestra, correspondiente a los métodos de esta familia es:

$$\begin{aligned}Var &= R_K \cdot (R_0^U - R_K) - R_0^L \cdot (R_0^U - R_K) \\ &= R_K \cdot (1 - R_K) - (1 - R_0^U) \cdot R_K - R_0^L \cdot (R_0^U - R_K).\end{aligned}$$

# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Basado en Cotas

- Siendo entonces menor que aquella correspondiente al Monte Carlo Crudo ( $R_K \cdot (1 - R_K)$ ); la diferencia depende de lo ajustadas que sean las cotas  $\Phi^L$  y  $\Phi^U$ .
- La performance en cuanto a su tiempo de ejecución depende de la complejidad computacional del cálculo de esas mismas funciones.
- Existe una variante del método para el caso particular en que todas las líneas de la red poseen la misma confiabilidad elemental.



# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Dagger

- El muestreo dagger fue propuesto por Kumamoto y puede ser visto como una extensión de la técnica de variables antitéticas.
- La idea base es la de generar bloques de  $L$  muestras, dentro de los cuales las variables aleatorias son elegidas de manera de introducir correlación negativa entre las muestras individuales.
- El tamaño  $L$  de cada bloque es elegido de forma tal que para cada arista  $l$  la secuencia de  $L$  replicaciones puede ser partida en exactamente  $N_l$  sub-bloques de tamaño  $L/N_l$ , siendo  $N_l = \lfloor 1/q_l \rfloor$

# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Dagger

- Para cada uno de esos sub-bloques se elige aleatoriamente (utilizando una variable uniforme) una única posición en la que la arista  $l$  va a fallar (esto genera un patron de fallos para las  $L$  replicaciones en que la frecuencia de fallas de cada arista está exactamente en proporción a la tasa media de fallo de la misma).
- Luego se recorre todas las replicaciones del bloque, controlando en cuales de ellas el grafo es  $K$  conexo y en cuales no lo es, para de esta forma obtener una estimación del valor de  $R_K$ .
- En este método, una única invocación a  $M()$  equivale a  $L$  muestras en Monte Carlo crudo, lo que debe ser tenido en cuenta para la comparación de las complejidades.

**Input:**  $G = (V, E)$ ,  $K \subseteq V$ ;

**Output:** un valor de  $R$ ;

**Inicialización  $\mathcal{I}$ :**

Calcular el vector de enteros  $(N_l : l \in E)$ :  $N_l = \lfloor 1/q_l \rfloor$ ;

Elegir el número de muestras:  $L = mcm\{N_l : l \in E\}$ ;

**Rutina  $M()$ :**

Para cada arista  $l$

Para cada sub-bloque de tamaño  $L/N_l$

Elegir aleatoriamente una replicación dentro del sub-bloque:

Sortear  $U$  uniforme, tomar  $\tilde{k} = \lceil U/q_l \rceil$

La arista  $l$  falla en esa replicación:

$x_l^k = 1, \forall k \neq \tilde{k}$ ;

$x_l^k = 0, \text{ si } \tilde{k} \leq L/N_l$ ;

fin\_para;

fin\_para;

Inicializar  $T = 0$ ;

Para  $i$  de 1 a  $L$

Contar las replicaciones correspondientes a un estado operacional de la red:

$T = T + \Phi(X^i)$ ;

fin\_para;

Devolver  $R = T/L$ ;

fin;

Figure 2: Rutina  $M()$  del Muestreo Dagger.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Muestreo Dagger

- El tiempo de complejidad de cada muestra es  $O(|E|)$ , como en el caso de Monte-Carlo Crudo.
- Sin embargo, dado que el número de variables aleatorias que es preciso generar durante la ejecución es mucho menor para el método “dagger”, existe una ganancia en tiempo de ejecución considerable, que resulta la principal ventaja de éste método respecto al crudo.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Construcción/Destrucción Secuenciales

- Los métodos de Construcción/Destrucción Secuenciales se basan en la consideración de un ordenamiento de las aristas del grafo. Todas las aristas se consideran en un momento como falladas, y luego son “reparadas” en forma sucesiva, una a una según el orden elegido, hasta que el sistema pasa a un estado operativo.
- El estimador de la confiabilidad se puede interpretar como una función de cuanto lleva llegar al estado operativo del sistema.
- El espacio de muestreo para el método de construcción secuencial consiste en parejas  $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$  donde  $\tilde{X}$  es un vector de estado del sistema y  $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{|E|})$  es una permutación de los índices de aristas de  $E$ , y existe un índice  $k$  que verifica:

$$\tilde{x}_{\tilde{\pi}_1} = \dots = \tilde{x}_{\tilde{\pi}_k} = 1,$$

$$\tilde{x}_{\tilde{\pi}_{k+1}} = \dots = \tilde{x}_{\tilde{\pi}_{|E|}} = 0.$$

## Métodos de Reducción de Varianza Construcción/Destrucción Secuenciales

- Si el vector  $\tilde{X}$  es elegido de acuerdo a las probabilidades de estado del sistema y la permutación  $\tilde{\pi}$  es elegida de forma independiente y uniforme sobre el conjunto de permutaciones compatibles, entonces la probabilidad de ocurrencia de una pareja dada  $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$  es:

$$\rho(\tilde{X}, \tilde{\pi}) = \frac{P(X = \tilde{X})}{k!(|E| - k)!} = \frac{1}{|E|!} C_k^{|E|} P(X = \tilde{X}),$$

donde  $k$  es el número de aristas que funcionan en  $\tilde{X}$ .

# Métodos de Reducción de Varianza

## Construcción/Destrucción Secuenciales

- El método de construcción secuencial muestra una permutación  $\tilde{\pi}$ , y considera en forma simultánea el conjunto  $\mathcal{P}_{\tilde{\pi}}$  de todos los posibles pares  $(\tilde{X}, \tilde{\pi})$ , tales que  $\tilde{X}$  es consistente con  $\tilde{\pi}$  según el criterio anterior.
- El valor de la confiabilidad  $R$  muestreado es entonces la probabilidad condicional de operación del sistema respecto a  $\mathcal{P}_{\tilde{\pi}}$ , es decir el cociente de la suma de probabilidades de los pares  $(\tilde{X}, \tilde{\pi}) \in \mathcal{P}_{\tilde{\pi}}$  tales que  $\Phi(\tilde{X}) = 1$  dividido por la probabilidad de  $\mathcal{P}_{\tilde{\pi}}$ .
- A continuación damos una descripción más detallada de la rutina de muestreo  $M$  para el Procedimiento de Construcción Secuencial (en este caso no existe una inicialización particular).

**Input:**  $G = (V, E)$ ,  $K \subseteq V$ ;

**Output:** un valor de  $R$ ;

**Rutina**  $M()$ :

**Sortear**  $\pi = (\tilde{\pi}_1, \dots, \tilde{\pi}_{|E|})$

**Para**  $k = 0, \dots, |E|$  (**Definir**  $\tilde{X}^{(k)}$ )

$$\tilde{x}_{\tilde{\pi}_1} = \dots = \tilde{x}_{\tilde{\pi}_k} = 1, \tilde{x}_{\tilde{\pi}_{k+1}} = \dots = \tilde{x}_{\tilde{\pi}_{|E|}} = 0.$$

**fin\_Para;**

**Determinar primer**  $r \in 0, \dots, |E|$  **tal que**  $\Phi(\tilde{X}^{(r)}) = 1$

**Calcular:**

$$R = \frac{\sum_{k=0}^{|E|} \Phi(\tilde{X}^{(k)}) \rho(\tilde{X}^{(k)}, \tilde{\pi})}{\sum_{k=0}^{|E|} \rho(\tilde{X}^{(k)}, \tilde{\pi})} = \frac{\sum_{k=r}^{|E|} C_k^{|E|} P(X = \tilde{X}^{(k)})}{\sum_{k=0}^{|E|} C_k^{|E|} P(X = \tilde{X}^{(k)})}.$$

**Returnar**  $R$ ;

**fin;**

Figure 3: Rutina  $M()$  del Muestreo Construcción/Destrucción Secuencial.



# Métodos de Reducción de Varianza

## Construcción/Destrucción Secuenciales

- Es posible mostrar que el estimador  $R$  obtenido en cada muestra con este método tiene varianza más pequeña que aquella correspondiente a una muestra del algoritmo crudo.
- El mayor esfuerzo computacional se realiza al determinar el primer índice  $r$ , que depende fundamentalmente de la facultad de cálculo de  $\Phi(\tilde{X}^{(k)})$ , es decir de cómo determinar cuando el sistema llega al estado operativo a medida que se reparan las líneas una a una.
- El orden computacional en el peor caso es  $O(|E| \max\{|V|, |E|\})$ .
- Es posible construir en forma análoga un método de destrucción secuencial, cuya aplicación puede ser ventajosa en sistemas de muy baja confiabilidad, dado que en ese caso el valor de  $r$  se determinará al cabo de menos iteraciones que si se aplicara el método de construcción.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Método de Riesgo Total

- Las variables de riesgo aleatorio, y en particular la variable de riesgo total, han sido empleadas en diversidad de contextos para el estudio por simulación de modelos aleatorios. Veremos su aplicación en la estimación de  $R_K(G)$ .
- Sea  $C_1$  un  $K$ -corte mínimo (un conjunto mínimo de aristas que al ser sacadas desconectan los nodos de  $K$  en el grafo). El primer riesgo,  $h_1$ , es la probabilidad de que todos los componentes en  $C_1$  no funcionen (lo que implica que el grafo no es  $K$ -conexo), es decir:

$$h_1 = \prod_{i \in C_1} q_i.$$

# Métodos de Reducción de Varianza

## Método de Riesgo Total

- El método del riesgo total consiste en simular el estado de todas las aristas de  $C_1$ . Si todas las aristas están fuera de servicio, el procedimiento finaliza. Si por lo menos una arista funciona, se fijan los estados de las aristas simuladas, y se busca un nuevo corte mínimo  $C_2$  en el grafo modificado. A partir del nuevo corte se calcula el segundo riesgo,  $h_2$ , dado por:

$$h_2 = \prod_{i \in C_2} q_i.$$

- A continuación se simula el estado de las aristas de  $C_2$  y se repite el proceso anterior, generando nuevos grafos hasta que todos los componentes de un corte mínimo esten fallados o hasta llegar a un grafo trivial, sin cortes mínimos (todas las aristas han sido fijadas).

# Métodos de Reducción de Varianza

## Método de Riesgo Total

- Si se consideraron  $r$  riesgos, el riesgo total está dado por:

$$H(G) = \sum_{i=1}^r h_i,$$

y es un estimador sin sesgo de  $Q_K$ .

- La implementación sugerida utiliza la lista de todos los cortes mínimos del sistema considerado, y la actualiza a medida que se fijan los estados de las aristas simuladas.
- El corte se elige en cada paso para que resulte en el máximo riesgo.

**Input:**  $G = (V, E)$ ,  $K \subseteq V$ , lista de  $K$ -cortes de  $G$ ;

**Output:** una muestra de  $R$ ;

**Inicialización  $\mathcal{I}$ :**  $H = 0$ ;

**Rutina  $M()$ :**

Elegir un  $K$ -corte mínimo  $C$ ;

Simular el estado de las aristas de  $C$ ;

Repetir hasta que todas las aristas del corte elegido están falladas

    Actualizar la lista de cortes del grafo  $G$ ;

    Calcular el riesgo:  $h = \prod_{i \in C} q_i$ ;

    Acumular en  $H$ :  $H = H + h$ ;

    Elegir un  $K$ -corte mínimo  $C$ ;

    Simular el estado de las aristas de  $C$ ;

finRepetir;

Retornar  $R = 1 - H$ ;

fin;

Figure 4: Rutina  $M()$  del Muestreo de Riesgo Total.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Método de Riesgo Total

- La reducción de varianza que es posible obtener con este método depende fuertemente de la forma de elegir el  $K$ -corte mínimo  $C$ .
- La heurística que parece más adecuada es la de elegir a cada paso el corte de mayor riesgo, pero esto conlleva un costo computacional que puede ser bastante elevado, ya que debe realizarse una búsqueda en la lista de cortes (que es de tamaño exponencial en el tamaño del grafo) o mediante un algoritmo de flujo máximo en cada iteración del flujo interno.
- La complejidad en el mejor de los casos es de  $O(|E|)$  por muestra, dado que es posible tener que simular el estado de todas las aristas del grafo.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

- El método de reducción recursiva de varianza utiliza una partición del espacio de estado y ciertas técnicas desarrolladas en los métodos exactos (condicionando respecto a una partición del espacio de estado, contracción, eliminación de aristas, etc) para obtener una muestra del estimado de anti-confiabilidad  $Q_K$ .
- Una formulación recursiva de la anti-confiabilidad de un grafo  $G$  a partir de la anti-confiabilidad de grafos más pequeños, basándose en un particionamiento del espacio de probabilidad subyacente, es:

$$Q_K(G) = Q_{C(G,K)} + \sum_{i=1}^{|C(G,K)|} P(B_i) \cdot Q_{K_i}(G_i),$$

# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

Donde:

- $C(G, K) = \{l_1, l_2, \dots, l_{|C(G, K)|}\}$  es un  $K$ -corte de  $G$ .
- $Q_{C(G, K)}$  es la probabilidad de que todos los componentes de  $C(G, K)$  fallen.
- $B_i$  es el evento que todos los componentes en el conjunto  $\{l_1, l_2, \dots, l_{i-1}\}$  fallan y el componente  $l_i$  funciona.
- $G_i = (G - l_1 - l_2 - \dots - l_{i-1}) * l_i$  y  $K_i$  es su conjunto de terminales.

NOTA:  $\mathcal{G} * l$  es el grafo deducido de  $\mathcal{G}$  por la contracción de la arista  $l$ .



# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

En base a la ecuación precedente se plantea el operador recursivo  $F(,)$  que proporciona un estimador sin sesgo de la anti-confiabilidad:

$$F(G, K) = Q_{C(G,K)} + (1 - Q_{C(G,K)}) \cdot \sum_{i=1}^{|C(G,K)|} \mathbf{1}_{(U(G,K)) \in J_i} F(G_i, K_i),$$

- $U(G, K)$  es una variable aleatoria independiente de distribución uniforme  $[0, 1]$ .
- $(J_i)_{1 \leq i \leq |C(G,K)|}$  es una secuencia de intervalos disjuntos cuya unión es  $[0, 1]$ , donde el largo de cada intervalo  $J_i$  es  $P(B_i)/(1 - Q_{C(G,K)})$ .

NOTA:  $\mathbf{1}_E$  denota la función indicatriz del evento  $E$ .

# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

- Como sólo una de las indicatrices tendrá valor 1, esto equivale a en cada paso ir acumulando las probabilidades de fallo de un corte y continuar el trabajo en un nuevo grafo  $G_i$  donde las aristas de  $G$  en funcionamiento son contraídas, y las falladas son eliminadas.
- El procedimiento  $M()$  corresponde a este método y debe ser utilizado desde el programa principal con los parámetros  $G$  y  $K$  devolviendo una muestra pseudo-aleatoria.
- En el **primer paso** del procedimiento se controlan las condiciones de finalización. Si  $K$  es un conjunto unitario, entonces el grafo es trivialmente  $K$ -conexo, por lo que el valor de la confiabilidad es 1 (y el de la anti-confiabilidad 0).

# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

- En el **segundo paso** se elige el corte  $C$  compuesto por todas las líneas adyacentes a un nodo arbitrario de  $K$ , y a continuación se calcula la probabilidad de que todos los componentes de  $C$  hayan fallado.
- En el **cuarto paso** se utiliza una variable aleatoria uniforme para determinar uno de los intervalos  $J_i$  de la partición dada en la fórmula anterior.
- **A continuación** se actualiza el grafo y el conjunto de terminales de acuerdo al intervalo seleccionado, y por último se realiza la llamada recursiva, utilizándose el valor devuelto en el cálculo de la muestra.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

**Input:**  $G = (V, E)$ ,  $K \subseteq V$ ;  
**Output:** una muestra de la variable aleatoria  $F(G, K)$ ;

**Rutina**  $M(G, K)$ :

**Controlar** condición de parada de la recursión:

**Si**  $|K| = 1$  **devolver** 0 ( $G$  es siempre  $K$ -conexo).

**Si**  $G$  no es  $K$ -conexo **devolver** 1.

**Buscar** un  $K$ -corte:

$C = \{l_1, \dots, l_{|C|}\}$ .

**Calcular**  $Q_C = \prod_{i=1}^{|C|} q_{l_i}$ .

**Muestrear**  $\mathcal{U}$  *Uniforme*(0, 1) **y elegir**  $J_i$  tal que  $\mathcal{U} \in J_i$ .

**Construir**  $G_i = (G - l_1 - l_2 - \dots - l_{i-1}) * l_i$ .

**Determinar**  $K_i$  correspondiente a  $G_i$ .

**Devolver**  $Q_C + (1 - Q_C) \cdot M(G_i, K_i)$ .

**fin**;

Figure 5: Rutina  $M()$  de la RVR.

# Métodos de Reducción de Varianza

## Reducción de Varianza Recursiva (RVR)

- Un cálculo sencillo permite evaluar la complejidad total de la obtención de una muestra con este algoritmo, que es de  $O(|E|^2)$ , frente a  $O(|E|)$  en el método crudo.
- El análisis de la reducción de varianza no está resuelto completamente, dado que depende de la elección del corte en cada paso.
- Una cota inferior de la reducción esperable en un único paso recursivo (que no tiene en cuenta el efecto acumulado) está dado por  $Q_C(1 - R_K)$ , lo que muestra el interés en elegir en el paso 3 un corte con una probabilidad de falla elevada.

# Bibliografía.

## References

- [1] H. Cancela, “Évaluation de sûreté de fonctionnement: modèles combinatoires et markoviens”. PhD. thesis, Rennes I, Campus de Beaulieu 35042 France, December 1996.
- [2] H. Cancela and M. El Khadiri, “A recursive variance reduction method for estimating communication network reliability”, Research Report PI860, IRISA, Rennes, France, Campus de Beaulieu 35042 France, September 1995.
- [3] H. Cancela and M. El Khadiri, “Recursive Path Conditioning Monte Carlo Simulation of Communication Network Reliability”,

Research Report PI915, IRISA, Rennes, France, Campus de Beaulieu 35042 France, March 1995.

- [4] M. El Khadiri, “Evaluation directe et par simulation d’indices de fiabilité de réseaux de communication: algorithmes séquentiels et dédiés à des architectures à mémoire distribuée”. PhD. thesis, Rennes I, Campus de Beaulieu 35042 France, December 1992.
- [5] M. El Khadiri and G. Rubino, “A Monte Carlo Method based on antithetic varieties for Network Reliability Computations”, Research Report PI626, IRISA, Rennes, France, Campus de Beaulieu 35042 France, 1992.
- [6] G.S. Fishman, “A Monte-Carlo sampling plan for estimating network reliability”, Operations Research 34, 1986.

- [7] R. Karp and M.G. Luby, "A new Monte Carlo method for estimating the failure probability of an  $n$ -component system", Computer Science Division, University of California (Berkeley), 1983.
- [8] H. Kumamoto and K. Tanaka and K. Inoue and E.J. Henley, "Dagger-sampling Monte Carlo for System unavailability evaluation", IEEE Transactions on Reliability 29, nro. 2, June 1980.
- [9] J.M. Hamersley and D.C. Handscomb, "Monte Carlo Methods", Halsted Press, Wiley & Sons. Inc., New York, 1979.
- [10] G. Rubino. Tutorial: Efficient evaluation of network reliability. In 7th. Conference on Modeling Tools and Techniques, Vienna, Austria, 1994.