ALN
Repaso matrices

In. Co.
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Definiciones básicas - Vectores

- Un vector (fila) $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ de dimensión n es conjunto ordenado de n escalares para el cual están definidas ciertas operaciones (suma, resta, módulo, producto escalar, producto vectorial, etc…)
- Pueden representar diversas cosas:
  - Valores de una magnitud física en distintas componentes del espacio ej: (x,y,z)…
  - Variables de estado o salida de un sistema
  - Etc…

Definiciones básicas - Vectores

- Construcciones
  - Producto interno: $$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i' = \alpha$$
  - Producto externo: $$PE = x' y$$
  - Combinación lineal: $$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$$

Definiciones básicas - Vectores

- Dependencia lineal
  - El conjunto de vectores $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente sii $\exists\ a_1, a_2, \dots, a_n \ \ a_i \in \mathbb{C}$ con algún $a_i \neq 0$ tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots . + a_n v_n = 0$$

  - De lo contrario, el conjunto se denomina linealmente independiente.

Definiciones básicas - Matrices

- Ortogonalidad:
  - Dos vectores v_1 y v_2 son ortogonales sii $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$
  - Un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se dice ortogonal sii:

$$(v_i, v_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

Definiciones básicas - Vectores

- Espacios Vectoriales: Conjunto V con las operaciones + y . definidas tal que $\forall u, v, w \in V$ se cumpla:

  - $u + v = v + u$
  - $u + (v + w) = (u + v) + w$
  - $u + 0 = u$
  - $u + (-u) = 0$
  - $1 * u = u$
  - $a(bu) = (ab)u$
  - $(a + b)u = au + bu$
  - $a(u + v) = au + av$

Definiciones básicas - Vectores

- Sub-espacios vectoriales:
  - Un sub-espacio vectorial de un espacio vectorial V es un subconjunto V_1 de V, que es espacio vectorial con las operaciones definidas de V.

Definiciones básicas - Vectores

- Un conjunto finito de vectores se dice que es **base** de un espacio vectorial V, si:
  - Los vectores son linealmente independientes
  - Todo elemento de V es una combinación lineal de los vectores del conjunto
- La cantidad de elementos necesarios para formar una base de un espacio vectorial es llamada *dimensión* de dicho espacio

Definiciones básicas - Matrices

- Una matriz de dimensiones mxn es un conjunto de escalares ordenados en una grilla de m filas y n columnas para el cual están definidas distintas operaciones (suma, resta, multiplicación, inversa, norma, determinante, etc…)

- Representan transformaciones lineales de un espacio vectorial.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ a_{m1} & a_{m1} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$y = Ax$$

Definiciones básicas - Matrices

- Con a_{ij} nos referimos al elemento de la fila i y columna j de la matriz A.
- A^T se denomina matriz transpuesta:
  - $a^T_{ij} = a_{ji}$
- A^* o A^H se denomina matriz transpuesta conjugada:
  - $a_{ij}^H = \overline{a_{ji}}$

Definiciones básicas - Matrices

- Operaciones
  - Suma:

$$C = A + B \rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

  - Multiplicación:

$$C = A * B \rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}$$

Definiciones básicas - Matrices

- Operaciones, propiedades A, B y C matrices:
  - $A(B+C) = AB+AC$
  - $A+B=B+A$
  - $A(BC)=(AB)C$
  - $\alpha AB = A(\alpha B) = AB\alpha$
  - $(AB)^t = B^t A^t$

Definiciones básicas - Normas

- Normas
  - Una función de (vectores, matrices, otros) a escalares que cumple las siguientes propiedades:

$$\|x\| \geq 0 \ \forall x \in V$$

$$\|x\| = 0 \text{ sii } x = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ \text{ con } x \in V, \alpha \in R$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ con } x, y \in V$$

Definiciones básicas - Normas

- Ejemplos: Normas-p

$$\|\mathrm{x}\|_p = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|\mathrm{x}\|_\infty = \max\{(x_j); j = 1,2\ldots n\}$$

- Normas matriciales

$$\|\mathrm{A}\|_{pq} = \max_{x\in R, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{\mathrm{p}}}{\|\mathrm{x}\|_q}$$

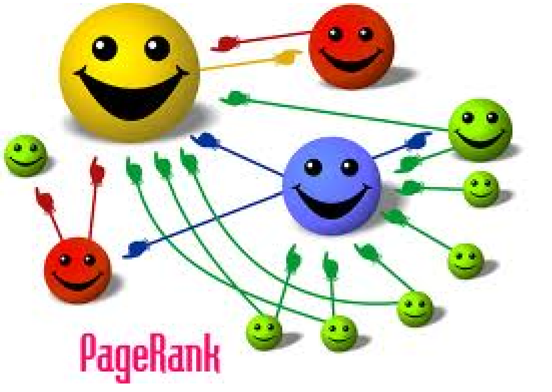
$$\|\mathrm{A}\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \ \text{(Norma matricial natural)}$$

$$\|\mathrm{A}\|_\infty = \max\left\{\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{n}} |\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}|, i = 1,2,\ldots n\right\}$$

Definiciones básicas – v&v propios

- Vectores y valores propios:
  - Si A es una matriz de nxn, entonces se dice que un vector v diferente de cero, es un vector propio de A si:

$$Av = \lambda v$$



  - λ es el valor propio de la matriz A asociado al vector propio v
  - Presentes en muchos problemas de ingeniería:
    - Estabilidad de sistemas físicos, soluciones de ecuaciones diferenciales, Google Page Rank!!! …

Definiciones básicas – v&v propios

- Los valores propios son las soluciones de:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- Los vectores propios asociados a λ son los x solución de:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Definiciones básicas – radio espectral

$$\text{Def. espectro de A } (\sigma(\text{A})) \text{ es el conjunto de valores propios,}$$
$$\sigma(\text{A}) = \left\{\lambda_j : Av_j = \lambda v_j\right\}$$

$$\text{Def. radio espectral de A } (\rho(\text{A})) \text{ es el mayor de los modulos}$$
$$\text{de sus valores propios } \ \rho(A) = \max\left|\lambda_j\right|$$

Definiciones básicas - Matrices

- Determinante (definición):
  - Es una función que le asigna a una matriz de orden *n*, un único número real.

$$\det(A) = \det(v_1, \cdots, v_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot c_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot c_{i,j}$$

Definiciones básicas - Matrices

- Determinante (propiedades):

$$\bullet \det(AB) = \det(BA)$$

$$\bullet \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

$$\bullet \det(A^t) = \det(A)$$

$$\bullet \det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$$

$$\bullet \det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$$

$$\bullet \det(I) = 1$$

Definiciones básicas - Matrices

Algunas clases particulares:

- Simétricas
- Hermitianas
- No-negativas
- Unitarias
- de Permutación
- Diagonales
- Triangulares (superior, inferior)
- Bi-diagonal (superior, inferior)
- de banda
- Hessenberg superior

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- Hermitianas
  - $a_{ij} = \overline{a_{ij}}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$$

- Propiedades:
  - Son diagonalizables por una base ortonormal de sus vectores propios.
  - Poseen todos sus valores propios reales
  - Su determinante es un número real

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- Simétricas:
  - $a_{ij} = a_{ji}$

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

- Propiedades:
  - Si posee entradas reales son un caso particular de matrices Hermitianas

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- No-negativas
  - $a_{ij} \geq 0$
  - No confundir con *definida positiva*
- Propiedades:
  - Si A es no negativa entonces tiene un valor propio real que además es el valor propio de mayor magnitud. El vector propio asociado a este valor propio es también no negativo

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- Unitarias
  - $Q^H Q = Q Q^H = I$
  - (su inversa es igual a la matriz transpuesta)
- Propiedades:
  - Sus columnas/filas son una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$
  - Preservan la norma y el producto interno
    - $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$
    - $\|Ux\| = \|x\|$

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- de Permutación

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Propiedades:
  - En cada fila columna hay un solo elemento igual a 1 mientras que el resto son 0.
  - Son unitarias
  - Al multiplicarlas por una matriz/vector producen una permutación de las filas/columnas de la misma, o de los elementos del vector

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- Diagonales
  - Poseen elementos no nulos únicamente en la diagonal

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Propiedades
  - Son simétricas, triangulares (inf y sup)
  - Sus valores propios son los elementos de la diagonal
  - Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal
  - Fáciles de almacenar y operar

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- Triangulares (inferior, superior)
  - $a_{ij} = 0\ sii\ i > j\ (superior)$

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Propiedades:
  - Sus valores propios son los elementos de la diagonal
  - Su determinante es el producto de los elementos de la diagonal.

$$L = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 9 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

Definiciones básicas - Matrices

Otras matrices particulares:

- Bi-diagonal (inferior, superior)

$$BL = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \qquad BU = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definiciones básicas - Matrices

Otras matrices particulares:

- Hessenberg superior

$$He = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{ij} = 0, \forall i, j \,/\, i > j + 1$$

Definiciones básicas - Matrices

Matrices particulares:

- de banda

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$m_l, m_u \quad a_{ij} \neq 0, i - m_l \leq j \leq i + m_u$$

Definiciones básicas

- **Sistema de ecuaciones lineales:**
  - Encontrar x tal que Ax = b.
  - Problema muy frecuente en modelos numéricos (sistemas físicos, economía, procesamiento de señales, optimización y muuuuuchos más!!!)
- **Teorema**: Sea A una matriz (nxn) con elementos de R, son equivalentes las siguientes afirmaciones:
  - Ax = b tiene una única solución
  - Ax = 0 implica x=0
  - A^{-1} existe
  - Det(A) != 0
  - Rango (A)=n

Al final de todo ….

- Problemas a resolver durante los dos primeros temas del curso:

$$Ax = b$$

$$Av_j = \lambda_j v_j \rightarrow \det(A - \lambda_j I) = 0$$