



# CLASE II

## MOTORES TIPO CARNOT

### ENDORREVERSIBLES E IRREVERSIBLES

Alejandro Medina, José Miguel Mateos Roco

Febrero 2018

<http://campus.usal.es/gtfe>



# ESQUEMA

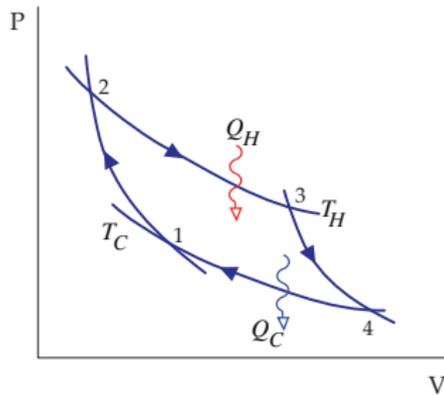
- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN



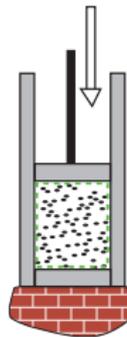
# ESQUEMA

- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN

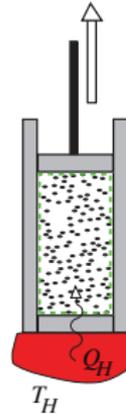
# CICLO DE CARNOT



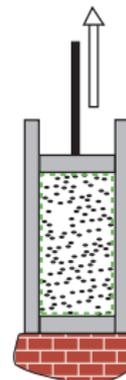
compresión  
adiabática



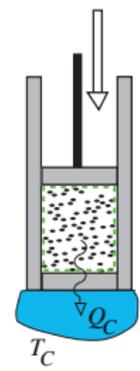
expansión  
isoterma



expansión  
adiabática



compresión  
isoterma



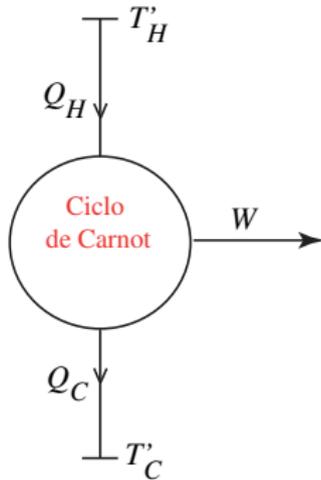


# ESQUEMA

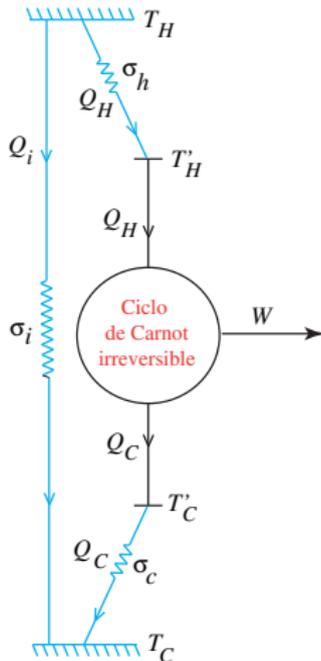
- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN



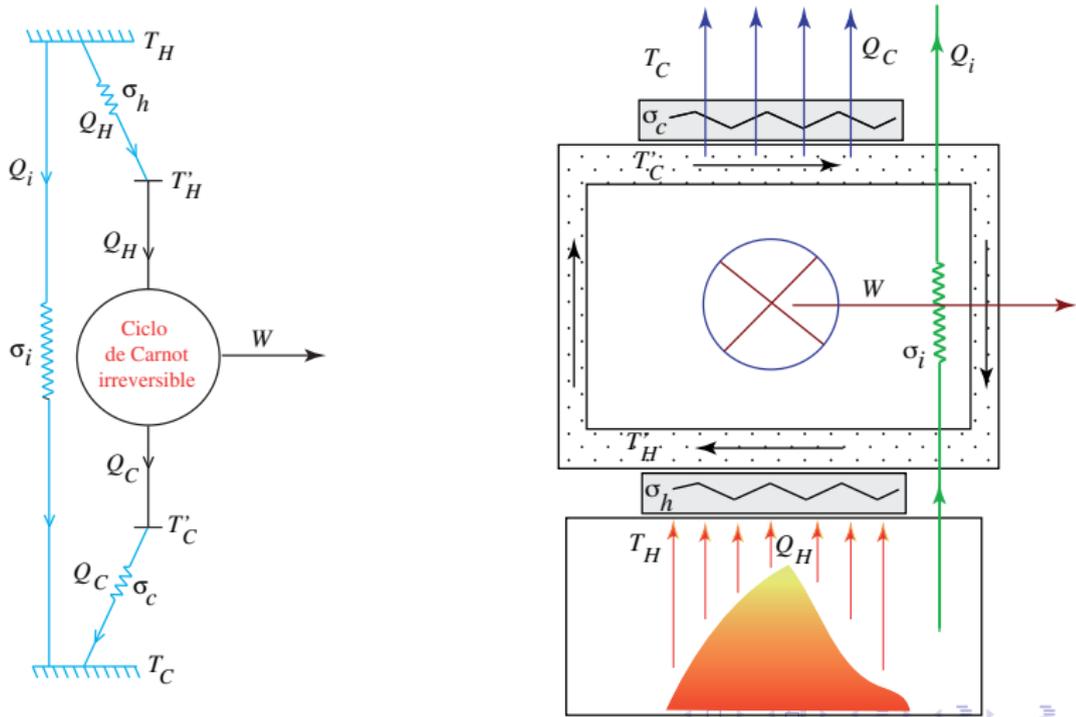
## MODELIZACIÓN DE UN CICLO TIPO CARNOT IRREVERSIBLE



## MODELIZACIÓN DE UN CICLO TIPO CARNOT IRREVERSIBLE



## MODELIZACIÓN DE UN CICLO TIPO CARNOT IRREVERSIBLE





# ESQUEMA

- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
  - Irreversibilidades externas
  - Irreversibilidades internas
  - Pérdidas de calor a través de la instalación
  - Potencia y rendimiento
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN



## TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES:

- ◇ Irreversibilidades **externas**
- ◇ Irreversibilidades **internas**
- ◇ **Pérdidas de calor a través de la instalación** (*heat-leak*)



## IRREVERSIBILIDADES EXTERNAS

Transferencias de calor (de tipo lineal) durante un tiempo  $t$ ,

$$|Q_h| = \sigma_h(T_h - T'_h)t \equiv \sigma_h T_h \left(1 - \frac{1}{a_h}\right) t$$

$$|Q_c| = \sigma_c(T'_c - T_c)t \equiv \sigma_c T_c(a_c - 1)t$$

donde:

- ◇  $a_h = T_h/T'_h \geq 1$ ,  $a_c = T'_c/T_c \geq 1$ ,  $\tau = T_c/T_h \leq 1$
- ◇  $\sigma_h$  y  $\sigma_c$  : conductancias térmicas entre el sistema de trabajo y las fuentes externas.



## IRREVERSIBILIDADES INTERNAS

Asociadas al fluido de trabajo: rozamientos, turbulencias, viscosidades...

Estimación mediante la desigualdad de Clausius,

$$\frac{|Q_h|}{T'_h} - \frac{|Q_c|}{T'_c} \leq 0 \quad \text{escrita como igualdad:}$$

$$I \longrightarrow \frac{|Q_h|}{T'_h} = I \frac{|Q_c|}{T'_c} \quad (0 < I \leq 1)$$

$I = 1 \longrightarrow$  motor internamente reversible



## PÉRDIDAS DE CALOR A TRAVÉS DE LA INSTALACIÓN

Transferencia de calor  $|Q_i|$  a velocidad finita entre las dos fuentes externas.

→ Ley lineal con sus diferencias de temperaturas y con una conductancia térmica  $\sigma_i$ .

$$|Q_i| = \sigma_i(T_h - T_c)t \equiv \sigma_i T_h(1 - \tau)t$$

Aislamiento térmico de la instalación

Tecnología + Economía



## LÍMITE ENDORREVERSIBLE:

El sistema funciona de forma internamente reversible, pero su acoplamiento con el exterior sí es irreversible.

$$I = 1; \quad \sigma_i = 0$$

Permite obtener ecuaciones matemáticas sencillas y genéricas (dependientes de pocas variables) que se pueden tomar como límites con los que comparar.

## POTENCIA Y RENDIMIENTO

Potencia,  $P$ :

$$P = \frac{|W|}{t} = \frac{(|Q_h| + |Q_i|) - (|Q_c| + |Q_i|)}{t} =$$
$$= \sigma_h T_h \frac{l(a_h - 1) - \sigma_{hc}(a_h - 1)^2 - \tau(a_h^2 - a_h)}{a_h(l + \sigma_{hc}) - \sigma_{hc}a_h^2}$$

Rendimiento,  $\eta$ :

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_h| + |Q_i|} = \frac{|Q_h| - |Q_c|}{|Q_h| + |Q_i|} =$$
$$= \left[ 1 - \frac{a_h \tau}{l - \sigma_{hc}(a_h - 1)} \right] \left[ \frac{(1 - a_h^{-1})}{(1 - a_h^{-1}) + \sigma_{ih}(1 - \tau)} \right]$$

donde  $\sigma_{hc} \equiv \sigma_h/\sigma_c$  y  $\sigma_{ih} \equiv \sigma_i/\sigma_h$ .



# ESQUEMA

- 1 CICLO DE CARNOT
- 2 MODELIZACIÓN
- 3 TIPOS DE IRREVERSIBILIDADES
- 4 CRITERIOS DE OPTIMIZACIÓN
  - Optimización de la potencia
  - Optimización del rendimiento
  - Optimización de la función ahorro
  - Comparación con rendimientos reales
  - Optimización de la función  $\Omega$
  - Otros criterios de optimización



## PARÁMETROS Y VARIABLES

Parámetros del problema:

- ▶ Conductancias  $\rightarrow (\sigma_h, \sigma_c, \sigma_i)$
- ▶ Temperatura de las fuentes externas  $\rightarrow (T_h, T_c)$
- ▶ Irreversibilidades internas,  $l$

Variable:

- ▶  $a_h$  ( $P$  y  $\eta$  dependen de  $T_h'$  a través de  $a_h$ )

$$P = P(a_h; \tau, \sigma_{hc}, \sigma_{ih}, l)$$

$$\eta = \eta(a_h; \tau, \sigma_{hc}, \sigma_{ih}, l)$$

$$\left( a_h \text{ y } a_c \text{ están ligados a través de: } a_c = \frac{l}{l - \sigma_{hc}(a_h - 1)} \right)$$



## PROCESO DE OPTIMIZACIÓN: OPTIMIZACIÓN DE LA POTENCIA

El valor máximo de la potencia se obtiene con la condición:

$$\left( \frac{\partial P}{\partial a_h} \right)_{a_h = \bar{a}_h} = 0$$

$$\bar{a}_h = \bar{a}_h(\tau, \sigma_{hc}, I)$$



## VALORES ÓPTIMOS DE $a_h$ Y $a_c$ :

$$\bar{a}_h = \frac{l + \sigma_{hc}}{\sigma_{hc} + \sqrt{\tau}l}, \quad \bar{a}_c = \frac{l(\sigma_{hc} + \sqrt{\tau}l)}{\sqrt{\tau}l(l + \sigma_{hc})}$$

Potencia máxima,  $P_{\max}$ :

$$P(\bar{a}_h) = P_{\max}(\tau, \sigma_{hc}, l) = \sigma_h T_h \frac{(\sqrt{l} - \sqrt{\tau})^2}{l + \sigma_{hc}}$$

Rendimiento en condiciones de máxima potencia,  $\eta_{\text{mp}}$ :

$$\begin{aligned} \eta(\bar{a}_h) &= \eta_{\text{mp}}(\tau, \sigma_{hc}, \sigma_{ih}, l) = \\ &= \left[ 1 - \sqrt{\frac{\tau}{l}} \right] \left[ 1 + \sigma_{ih}(1 - \tau) \frac{l + \sigma_{hc}}{(l - \sqrt{\tau}l)} \right]^{-1} \end{aligned}$$



LÍMITE ENDORREVERSIBLE,  $l = 1$  Y  $\sigma_j = 0$

$$P_{\max} = \sigma_h T_h \frac{(1 - \sqrt{\tau})^2}{1 + \sigma_{hc}}$$

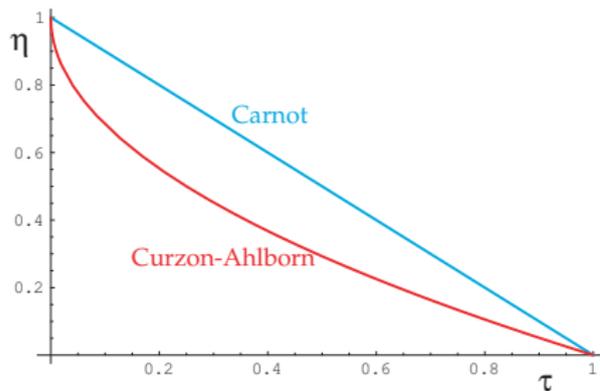
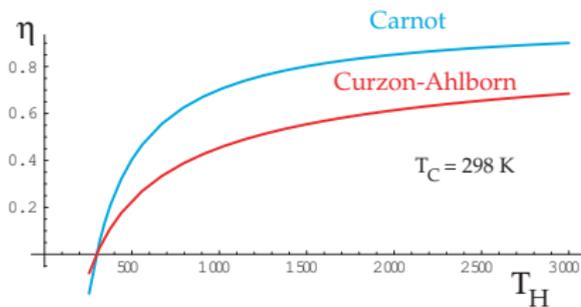
$$\eta_{\text{mp}}(\tau) = 1 - \sqrt{\tau} \equiv \eta_{CA}$$

Rendimiento de **Curzon-Ahlborn** (1975),

$$\eta_{\text{mp}} \equiv \eta_{CA} < \eta_C$$



## RENDIMIENTO DEL MOTOR ENDORREVERSIBLE



## EJEMPLO DE PLANTAS DE POTENCIA REALES



*Central nuclear 'Doel 4' en Doel, Bélgica (1985, 1008 MW):*

Fuente caliente: circuito primario,  $T_h = 566$  K

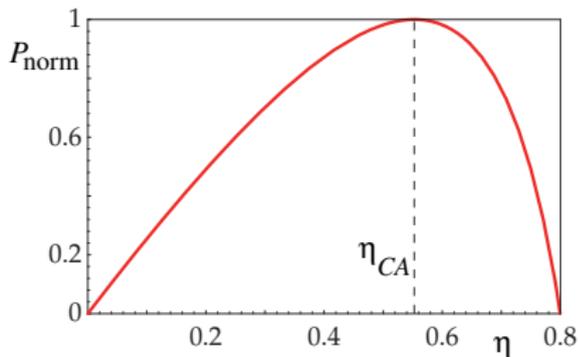
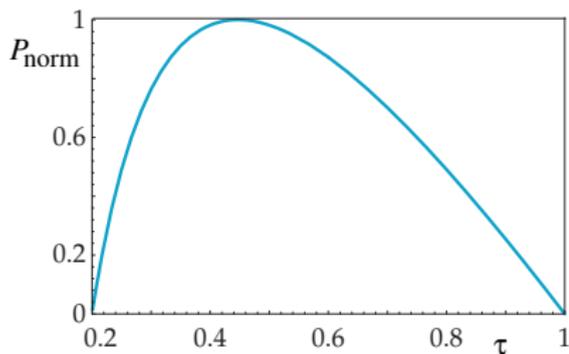
Fuente fría: atmósfera y río Schelde,  $T_c = 283$  K

$\eta$ medido	Carnot	endorreversible
0.35	0.50	0.30



## POTENCIA EN UN MOTOR DE CARNOT ENDORREVERSIBLE

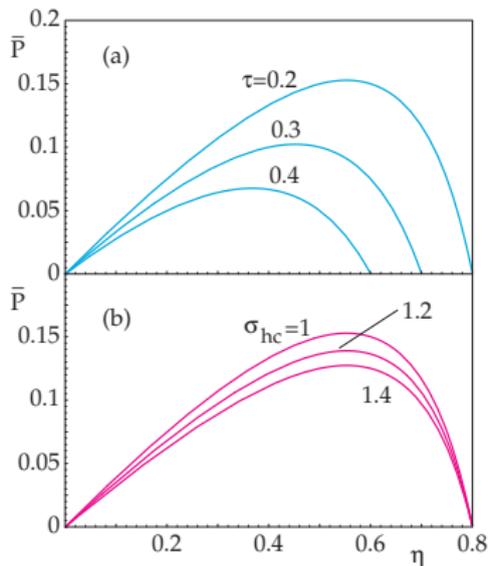
$$\sigma_{hc} = 1$$



$$T_h = 1500 \text{ K}; T_c = 300 \text{ K}$$



## POTENCIA EN UN MOTOR DE CARNOT ENDORREVERSIBLE

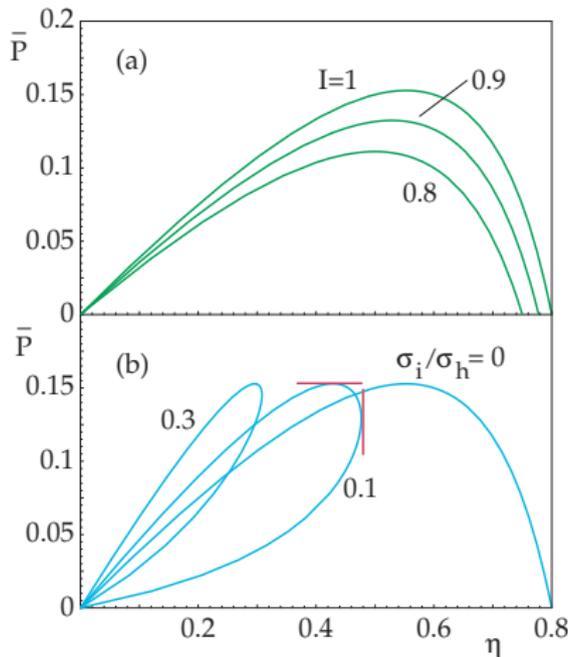


$$\bar{P} \equiv \frac{P}{\sigma_h T_h}$$

- (a)  $l = 1, \sigma_{hc} = 1$   
(b)  $l = 1, \tau = 0,2$



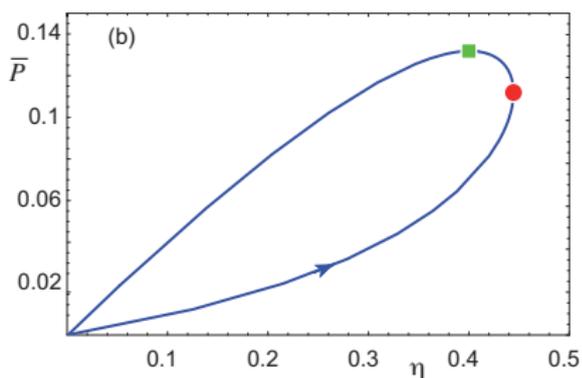
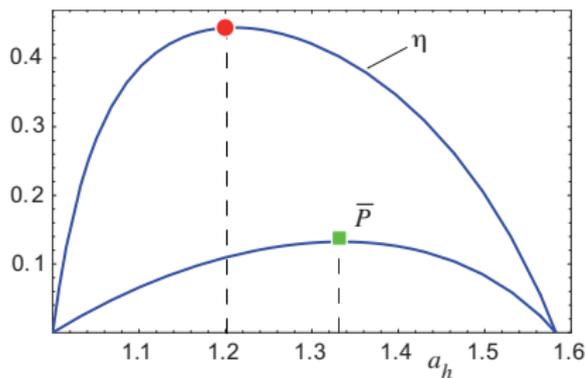
## MOTOR DE CARNOT IRREVERSIBLE



- (a)  $\sigma_{hc} = 1, \tau = 0,2, \sigma_i = 0$   
(b)  $\sigma_{hc} = 1, I = 1, \tau = 0,2$



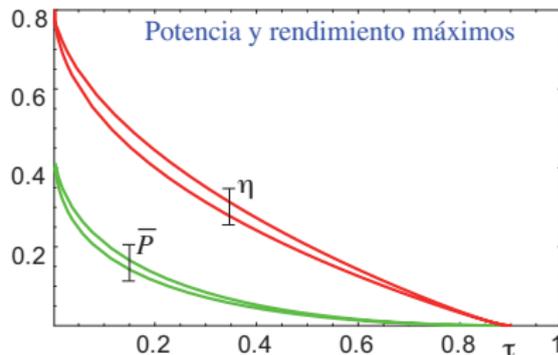
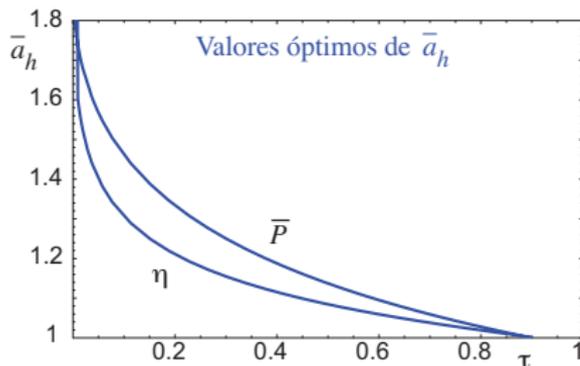
## OPTIMIZACIÓN DEL RENDIMIENTO



$$\tau = 0,2, l = 0,9, \sigma_{hc} = 1, \sigma_{ih} = 0,1$$



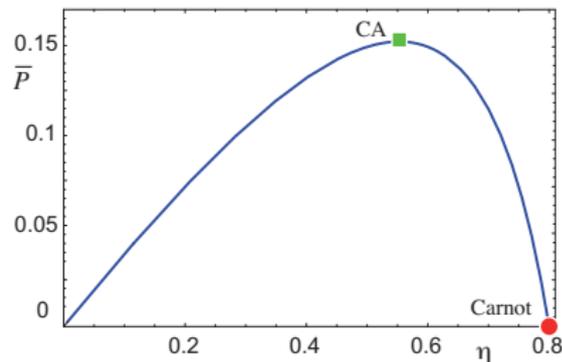
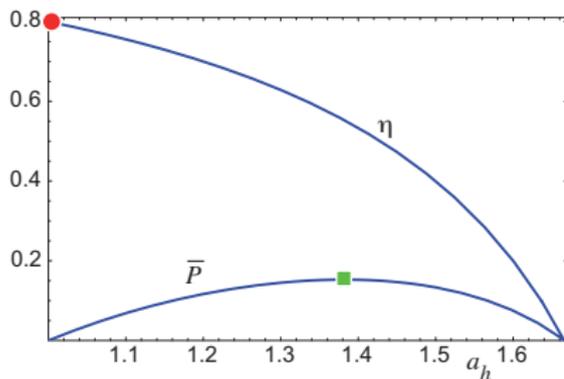
## MOTOR DE CARNOT IRREVERSIBLE



$$I = 0,9, \sigma_{hc} = 1, \sigma_{ih} = 0,1$$



## LÍMITE ENDORREVERSIBLE



$$\tau = 0,2, l = 1, \sigma_{hc} = 1, \sigma_{ih} = 0$$



## OPTIMIZACIÓN DE LA FUNCIÓN AHORRO

Flujos de energía básicos en cualquier ciclo de potencia:

- ◇ Calor cedido por la fuente de temperatura alta  
↳ combustible consumido
- ◇ Calor cedido a la fuente fría (atmósfera)  
↳ **polución térmica**
- ◇ Potencia producida  
↳ energía eléctrica producida



## DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN AHORRO, $\phi$

$$\phi \equiv \bar{P} q_H q_C$$

donde:

$$\bar{P} = \frac{P}{P_m}$$

$$q_H = 1 - \frac{|Q_H|}{|Q_H|_m}$$

$$q_C = 1 - \frac{|Q_C|}{|Q_C|_m}$$

El subíndice  $m$  denota valores máximos



## FUNCIÓN AHORRO

**Calores máximos:** cuando la potencia es nula  $\implies$  todo el calor extraído de la fuente caliente se transfiere a la fría.

$$|Q_H|_m = |Q_C|_m$$

$q_H \hookrightarrow$  función ahorro asociada al combustible consumido

$q_C \hookrightarrow$  función ahorro asociada a la polución térmica

$\implies \phi$ , mejor compromiso entre maximización de potencia y minimización de consumo de combustible y polución térmica



## FUNCIÓN AHORRO

Potencia máxima en el límite endorreversible:

$$P_m = \sigma_h T_h \frac{(\sqrt{I} - \sqrt{\tau})^2}{I + \sigma_{hc}}$$

La potencia se anula cuando:

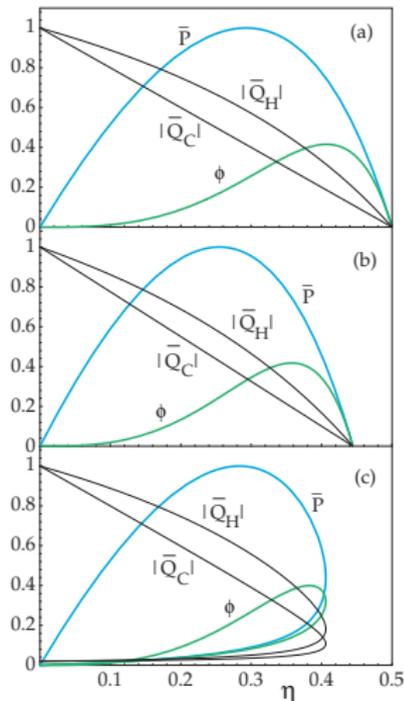
$$\begin{cases} a_h = a_c = 1 & \text{(caso trivial)} \\ a_h = \frac{I + \sigma_{hc}}{\tau + \sigma_{hc}} \end{cases}$$

que es cuando los calores toman el valor máximo:

$$|Q_H|_m = |Q_C|_m = \sigma_h T_h \left[ \frac{I - \tau}{I + \sigma_{hc}} + \sigma_{ih}(1 - \tau) \right]$$



## FUNCIÓN AHORRO



$$\tau = 0,5, \sigma_{hc} = 1$$

$$(a) \quad l = 1, \sigma_{ih} = 0$$

$$(b) \quad l = 0,9, \sigma_{ih} = 0$$

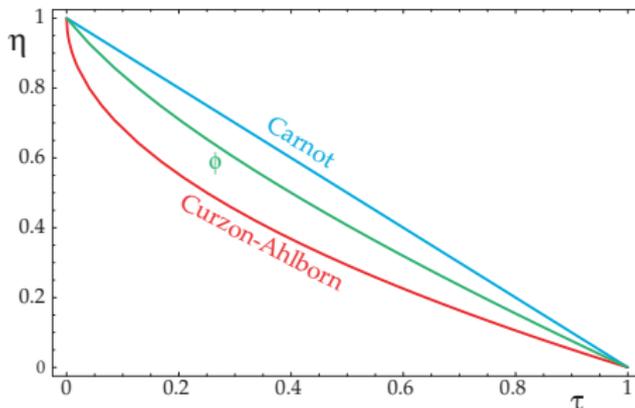
$$(c) \quad l = 1, \sigma_{ih} = 0,01$$



## FUNCIÓN AHORRO

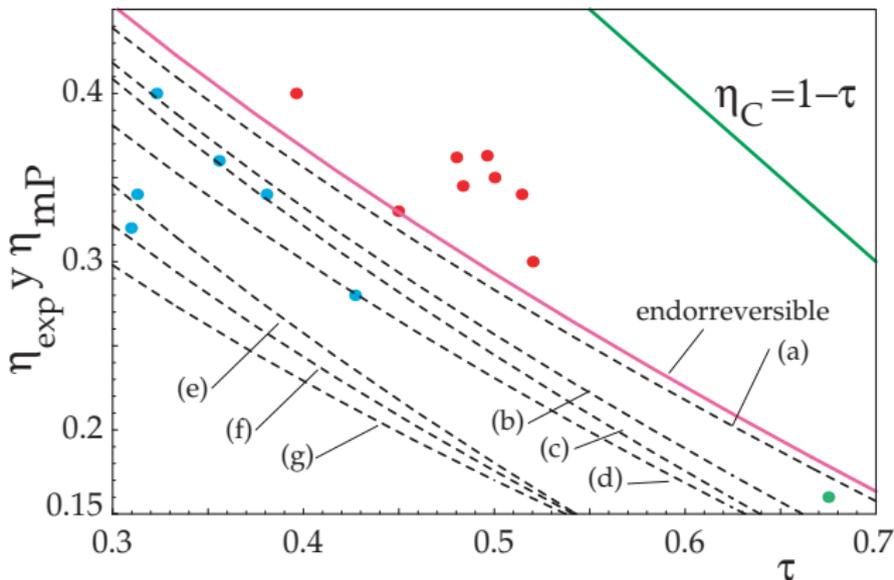
Límite endorreversible,  $l = 1, \sigma_{ih} = 0$

$$\eta_{m\phi} = \frac{1}{4} \left[ 5 - \tau - \sqrt{(1 + \tau)^2 + 12\tau} \right]$$



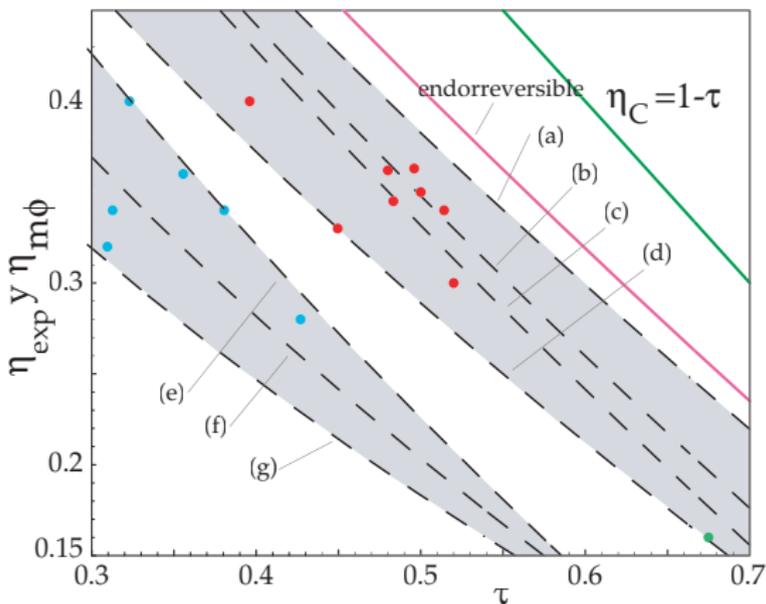


## COMPARACIÓN CON RENDIMIENTOS REALES: OPTIMIZACIÓN DE $P$



● plantas nucleares; ● convencionales ; ● geotérmicas

## COMPARACIÓN CON RENDIMIENTOS REALES: OPTIMIZACIÓN DE $\phi$



● plantas nucleares; ● convencionales; ● geotérmicas



## FUNCIÓN $\Omega$

### Ingredientes:

un convertidor energético cualquiera que produce una energía útil  $E_u(x; \{\alpha\})$  a partir de una energía de entrada  $E_i(x; \{\alpha\})$  donde:

$$\begin{cases} x \rightarrow \text{variable independiente} \\ \{\alpha\} \rightarrow \text{conjunto de parámetros de control} \end{cases}$$

El **rendimiento** suele definirse como:

$$z(x; \{\alpha\}) = \frac{E_u(x; \{\alpha\})}{E_i(x; \{\alpha\})}$$

$$z_{\min}(\{\alpha\}) < z(x; \{\alpha\}) < z_{\max}(\{\alpha\})$$



## DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN $\Omega$

Dada una energía de entrada,  $E_i(x; \{\alpha\})$ :

$$z_{\min}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\}) < E_u(x; \{\alpha\}) < z_{\max}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\})$$

Se puede definir la **energía útil efectiva**:

$$E_{u,ef}(x; \{\alpha\}) \equiv E_u(x; \{\alpha\}) - z_{\min}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\})$$

y la **energía útil perdida**:

$$E_{u,per}(x; \{\alpha\}) \equiv z_{\max}(\{\alpha\})E_i(x; \{\alpha\}) - E_u(x; \{\alpha\})$$

Compromiso entre energía útil y energía útil perdida:

$$\Omega(x; \{\alpha\}) \equiv E_{u,ef}(x; \{\alpha\}) - E_{u,per}(x; \{\alpha\})$$

$$\rightarrow \Omega(x; \{\alpha\}) = \frac{2z(x; \{\alpha\}) - z_{\min}(\{\alpha\}) - z_{\max}(\{\alpha\})}{z(x; \{\alpha\})} E_u(x; \{\alpha\})$$



## CASO PARTICULAR

### MÁQUINAS DE POTENCIA

$$z(x; \{\alpha\}) = \eta = \frac{|W|}{|Q_h|}$$

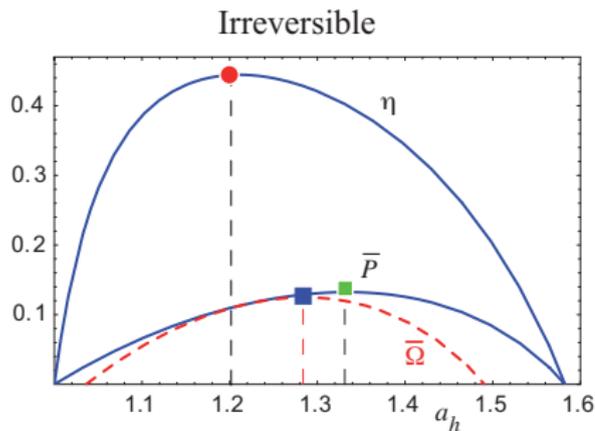
$$\implies \Omega = (2\eta - \eta_{\max})|Q_h| = (2\eta - \eta_{\max})\frac{|W|}{\eta}$$



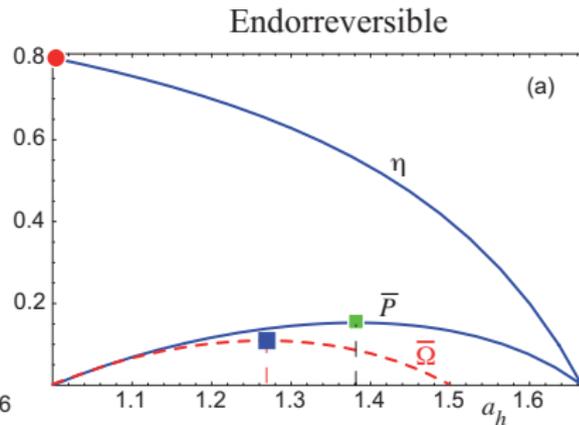
## PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN $\Omega$

- Fácil de implementar en cualquier tipo de convertidor. No sólo de potencia, si no también *frigoríficos y bombas*. Incluso en sistemas *microscópicos y mesoscópicos*.  
Es un criterio universal, válido para cualquier tipo de convertidor.
- Su cálculo no necesita cálculos de generación de *entropía*.
- Tampoco requiere la consideración de parámetros del entorno, como en ciertas funciones *ecológicas* o la *exergía*.

## OPTIMIZACIÓN CON $\Omega$



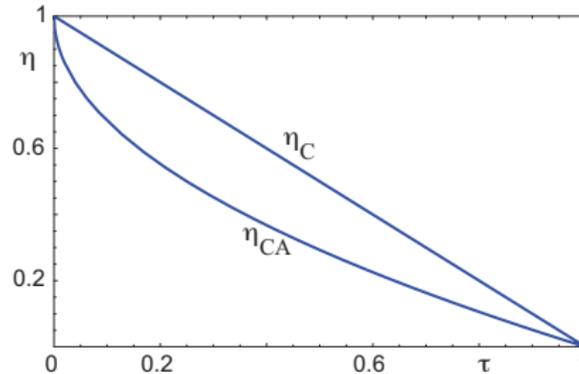
$$\tau = 0,2, \sigma_{hc} = 1, l = 0,9, \sigma_{ih} = 0,1$$



$$\tau = 0,2, \sigma_{hc} = 1, l = 1, \sigma_{ih} = 0$$



## OPTIMIZACIÓN CON $\Omega$ : LÍMITE ENDORREVERSIBLE

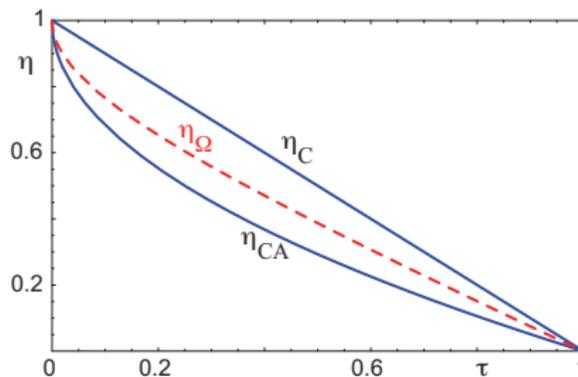


$$\eta_C = 1 - \tau$$

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\tau}$$



## OPTIMIZACIÓN CON $\Omega$ : LÍMITE ENDORREVERSIBLE



$$\eta_C = 1 - \tau$$

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\tau}$$

$$\eta_\Omega = 1 - \sqrt{\tau(\tau + 1)/2}$$

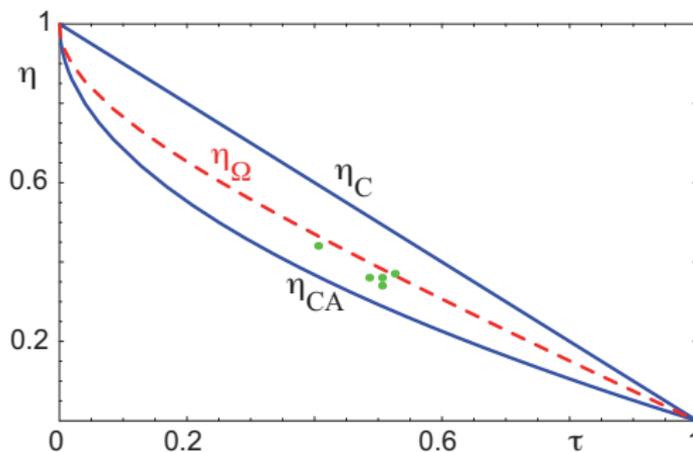


Planta	$T_h$ (K)	$T_c$ (K)	$\tau$	$\eta_{obs}$	$\eta_C$	$\eta_{CA}$	$\eta_\Omega$
Doel 4 (PWR, Bélgica)	566	283	0.50	0.35	0.50	0.30	0.39
Almaraz II (PWR, España)	600	290	0.48	0.35	0.52	0.30	0.40
Sizewell B (PWR, UK)	581	288	0.50	0.36	0.50	0.31	0.37
Cofrentes (BWR, España)	562	289	0.51	0.34	0.48	0.28	0.39
Heysham (AGR, UK)	727	288	0.40	0.40	0.60	0.37	0.47



## COMPARACIÓN CON PLANTAS DE ENERGÍA NUCLEAR

Planta	$T_h$ (K)	$T_c$ (K)	$\tau$	$\eta_{obs}$	$\eta_C$	$\eta_{CA}$	$\eta_\Omega$
Doel 4 (PWR, Bélgica)	566	283	0.50	0.35	0.50	0.30	0.39
Almaraz II (PWR, España)	600	290	0.48	0.35	0.52	0.30	0.40
Sizewell B (PWR, UK)	581	288	0.50	0.36	0.50	0.31	0.37
Cofrentes (BWR, España)	562	289	0.51	0.34	0.48	0.28	0.39
Heysham (AGR, UK)	727	288	0.40	0.40	0.60	0.37	0.47





## CRITERIO ECOLÓGICO

Representa un compromiso entre la **máxima potencia  $P$**  y la mínima generación de **entropía  $\sigma$** :

$$E \equiv P - T_c \sigma$$

Para un ciclo endorreversible, coincide exactamente con el criterio  $\Omega$ : **es un caso particular de éste.**

$$E = \Omega \quad \longrightarrow \quad \eta_E = \eta_\Omega = 1 - \sqrt{\tau(\tau + 1)/2}$$



## CRITERIOS TERMEOECONÓMICOS

### *Profit function*

$$\Pi = P_P P - P_{\dot{A}} \dot{A} = P_P P - P_{\dot{A}} T_0 \dot{\sigma}$$

donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} P : \text{potencia} \\ \dot{A} = T_0 \dot{\sigma} : \text{exergía por unidad de tiempo} \\ T_0 : \text{temperatura del ambiente} \\ P_P : \text{precio de la potencia producida (electricidad)} \\ P_{\dot{A}} : \text{precio de la exergía} \end{array} \right.$$



## CRITERIOS TERMOECONÓMICOS

*Profit function:* LÍMITE ENDORREVERSIBLE

$$\eta_{\pi} = 1 - \tau \sqrt{\frac{1 + k\tau_0}{\tau + k\tau_0}}$$

donde

$$\begin{cases} \tau_0 = \frac{T_0}{T_h} \\ k = \frac{P_{\dot{A}}}{P_P} \end{cases}$$

Casos límite:

$$\begin{cases} k = 0 & \implies \eta_{\pi} = \eta_{CA} = 1 - \sqrt{\tau} \\ k \rightarrow \infty & \implies \eta_{\pi} = \eta_C = 1 - \tau \end{cases}$$



## OTROS CRITERIOS TERMOECONÓMICOS

DE VOS (1996)

Función objetivo:  $F \equiv \frac{W}{C}$

Coste total de explotación:  $C = aQ_{\max} + bQ_H$

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\max} \rightarrow \text{medida del tamaño de la planta} \\ Q_H \rightarrow \text{calor absorbido real} \\ a, b \rightarrow \text{constantes de proporcionalidad en \$/julio} \end{array} \right.$$



## OTROS CRITERIOS TERMOECONÓMICOS

DE VOS (1996)

$$\text{Optimización: } \left( \frac{dF}{dT'_H} \right) = 0$$

$$\eta_{\text{opt}}(\tau, f) = 1 - \frac{f}{2}\tau - \frac{1}{2} \left[ 4(1-f)\tau + f^2\tau^2 \right]^{1/2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{T_C}{T_H} \\ f = \frac{bQ_H}{aQ_{\text{max}} + bQ_H} \end{array} \right.$$

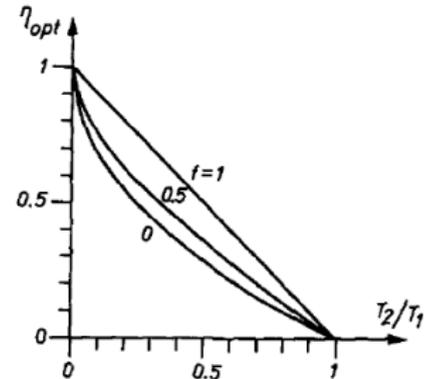
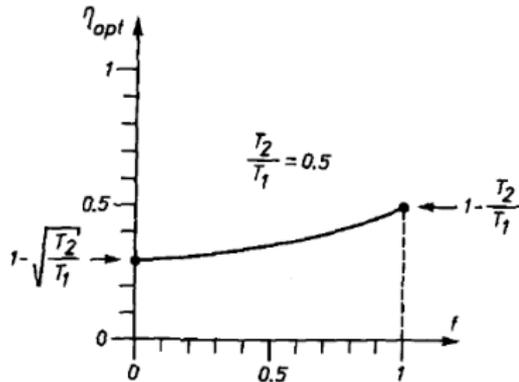


## COSTE RELATIVO DE DIVERSOS COMBUSTIBLES

$\left\{ \begin{array}{l} f = 0 \rightarrow \text{predominan los gastos de la inversión} \rightarrow \text{CA} \\ f = 1 \rightarrow \text{predominan los gastos de combustible} \rightarrow \text{Carnot} \end{array} \right.$

Combustible	$f$ (%)
Renovable	0
Uranio	25
Carbón	35
Gas	50

## EVOLUCIÓN DEL RENDIMIENTO TERMOECONÓMICO ÓPTIMO





## BIBLIOGRAFÍA

- F. L. Curzon y B. Ahlborn, *Efficiency of a Carnot engine at maximum power output*, Am. J. Phys., **43**, 22-24 (1975).
- A. De Vos, *Thermodynamics of Solar Energy Conversion*, Wiley (2008).
- S. Velasco, J. M. M. Roco, A. Medina J. A. White and A. Calvo Hernández, *Optimization of heat engines including the saving of natural resources and the reduction of thermal pollution*, J. Phys. D: Appl. Phys., **33**, 355-359 (2000).
- F. Angulo-Brown, *An ecological optimization criterion for finite-time heat engines*, J. Appl. Phys., **69**, 7465-7469 (1991).
- J. Chen, *The maximum power output and maximum efficiency of an irreversible Carnot heat engine*, J. Phys. D: Appl. Phys., **27**, 1144-1149 (1994).
- M. Esposito, K. Lindenberg, and C. Van der Broeck *Universality of efficiency at maximum power* Phys. Rev. Lett. **102**, 130602 (2009).
- A. de Vos *Endoreversible Thermoconomics* Energy Conversion and Management **36**, 1-5 (1995).



FIN