Universidad de la República **Cálculo 3**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2017**

Solución Examen – Sábado 9 de diciembre de 2017

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
B	B	C	C	A

(II) Desarrollo. Total: 70 puntos

Problema 1 (40 puntos)

a) **Ver teórico**
b) **Ver teórico**
c) **Ver teórico**

Considere ahora $\Omega = \mathbb{R}^3$ y una fuerza $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ correspondiente a un campo de gradientes: esto es, asuma que existe un potencial escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla\phi$.
Considere por otra parte una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza F, siguiendo una curva $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, con $t \in \mathbb{R}$. La Segunda Ley de Newton establece que:

$$F(\alpha(t)) = m\alpha''(t).$$

Se define finalmente la energía de la partícula bajo la acción de la fuerza $F = \nabla\phi$ como la siguiente función de $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = \frac{1}{2}m \parallel \alpha'(t) \parallel^2 - \phi(\alpha(t)).$$

d) (**12 puntos**) Pruebe que la energía es una constante que no depende de t. Esto es: pruebe que se cumple $E'(t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

$$E(t) = \frac{1}{2}m \parallel \alpha'(t) \parallel^2 - \phi(\alpha(t)) = \frac{1}{2}m\alpha'(t)\cdot\alpha'(t) - \phi(\alpha(t)),$$

donde $\cdot$ representa el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$. Entonces, derivando:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}m\big(\alpha''(t)\cdot\alpha'(t) + \alpha'(t)\cdot\alpha''(t)\big) - \nabla\phi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) \\ &= m\alpha''(t)\cdot\alpha'(t) - \nabla\phi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) = F(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) - \nabla\phi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) \\ &= \nabla\phi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) - \nabla\phi(\alpha(t))\cdot\alpha'(t) = 0. \end{aligned}$$

Lo cual prueba que la energía se conserva.

Problema 2 (30 puntos)

Considere el campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por:

$$F(x, y, z) = (h(x)[\alpha \sin(z) + \beta \cos(z)]\,,\, h(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\,,\, \sin(z) + \cos(z)),$$

donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^1, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a)

$$\mathrm{rot}(F) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ h(x)[\alpha \sin(z) + \beta \cos(z)] & h(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)] & \sin(z) + \cos(z) \end{vmatrix}$$

$$= \big(h(x)[\alpha \sin(z) + \beta \cos(z)]\,,\, h(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\,,\, h'(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\big).$$

b) $\mathrm{rot}(F) = F$ si y sólo si

$$\big(h(x)[\alpha \sin(z) + \beta \cos(z)]\,,\, h(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\,,\, \sin(z) + \cos(z)\big)$$

$$=$$

$$\big(h(x)[\alpha \sin(z) + \beta \cos(z)]\,,\, h(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\,,\, h'(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)]\big)$$

Basta pedir que $h'(x)[\alpha \cos(z) - \beta \sin(z)] = \sin(z) + \cos(z)$, entonces $h'(x) = 1$, $\alpha = 1$ y $\beta = -1$ hacen que esta condición se cumpla.

Si $h'(x) = 1$ entonces $h(x) = x + k$. Pero la condición $F(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ nos permite probar que $k = 0$.

c) $\displaystyle\iint_S F \cdot dS = \iint_S \mathrm{rot}\, F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds.$

$\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, una parametrización posible es $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0), \quad F(\alpha(t)) = (-\cos t, \cos t, 1) \Rightarrow F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \cos^2 t - \sin t \cos t.$$

Entonces

$$\iint_S F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} [\cos^2 t - \sin t \cos t] = \pi.$$