Ejercicio 4

a) De las ecuaciones de las constantes generales tenemos las siguientes ecuaciones:

$$V_1 = AV_2 - BI_2 \tag{1}$$
$$I_1 = CV_2 - DI_2 \tag{2}$$

De la ley de Ohm en Z_L:

$$V_2 = -Z_L I_2 \tag{3}$$

Sustituyendo 3 en 2 y 1 y haciendo el cociente entre V_1 e I_1 obtenemos la impedancia vista Z_i

$$\boxed{Z_i = \frac{V_1}{I_1} = \frac{(-AZ_L - B)I_2}{(-CZ_L - D)I_2} = \frac{AZ_L + B}{CZ_L + D}} \tag{4}$$

Ahora calculamos $H(s)$.

Sustituyendo la ecuación 3 en 2 :

$$I_1 = \left(C + \frac{D}{Z_L}\right)V_2 \implies \boxed{H(s) = \frac{Z_L}{CZ_L + D}} \tag{5}$$

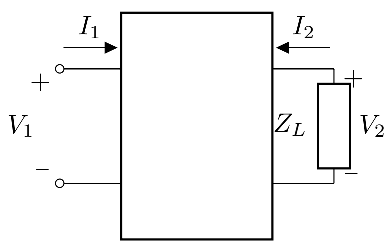

Figura 1: Cuadripolo con puerto 2 cargado con impedancia Z_L

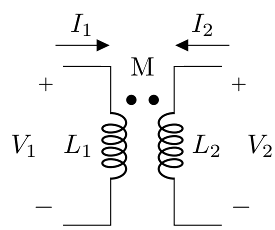

Figura 2: Transformador simple

b) Escribimos las ecuaciones de l transformador:

$$V_1 = L_1 s I_1 + MsI_2 \tag{6}$$
$$V_2 = MsI_1 + L_2 s I_2 \tag{7}$$

Si despejamos I_1 de la ecuación 7 y sustituimos en 6 ya tenemos una ecuación que vincula V_1 con la corriente y voltaje del puerto 2:

$$I_1 = \boxed{\overbrace{\frac{1}{Ms}}^{C}} V_2 - \boxed{\overbrace{\frac{L2}{M}}^{D}} I_2 \tag{8}$$

$$\implies V_1 = L_1 s\left(\frac{V_2}{Ms} - \frac{L2}{M}I_2\right) + MsI_2 = \boxed{\overbrace{\frac{L_1}{M}}^{A}} V_2 - \boxed{\overbrace{\left(\frac{L_1L_2}{M} - M\right)s}^{B}} I_2 \tag{9}$$

c) Dado que el transformador es perfecto $M = \sqrt{L_1L_2}$.

Abrimos el lazo a la salida del operacional A_2 como se muestra en la figura 3, inyectamos e_i y calculamos el cociente $G_{OL} = \frac{e_o}{e_i}$.

La corriente por el primario $I_1(s)$ es la misma que la que circula por la serie de R y L_2 en el sentido indicado en la figura 3, debido a la impedancia de entrada infinita del operacional. A su vez por la tierra virtual esta corriente es:

$$I_1 = \frac{-e_i}{R + L_2 s} \tag{10}$$

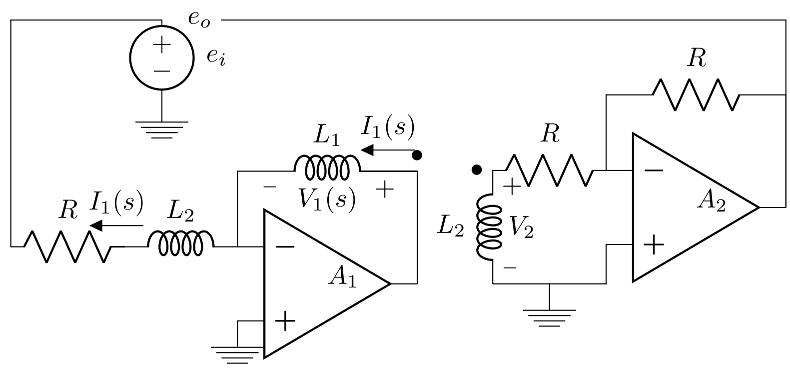

Figura 3: Apertura del lazo

Usando la ecuación 5 sustituyendo las constantes por las calculadas en 9 y Z_L por R tenemos:

$$V_2 = HI_1 = \frac{Z_L}{CZ_L + D} I_1 = \frac{R}{\frac{R}{Ms} + \frac{L_2}{M}} I_1 = \frac{Ms}{1 + \frac{L_2}{R}s} I_1 = -\frac{Ms}{1 + \frac{L_2}{R}s}\frac{1}{R + L_2 s} e_i = -\frac{Ms}{R\left(1 + \frac{L_2 s}{R}\right)^2} e_i \tag{11}$$

El operacional A_2 está en una configuración inversora de ganancia -1 por lo que $e_o = -V_2$ por lo tanto:

$$\boxed{G_{OL}(s) = \frac{e_o(s)}{e_i(s)} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}s}{R\left(1 + \frac{L_2 s}{R}\right)^2}} \tag{12}$$

d) Utilizamos el criterio de Barkhausen, es decir se tiene que cumplir que $G_{OL}(j\omega_0) = 1$, imponemos dicha condición:

$$\sqrt{L_1 L_2} j\omega_0 = R\left(1 + 2\frac{L_2}{R} j\omega_0 - \left(\frac{L_2}{R}\right)^2 \omega_0^2\right) \tag{13}$$

Igualando partes reales e imaginarias:

$$\text{parte real:} \quad \tfrac{R}{L_2} = \omega_0 \implies \boxed{L_2 = R\omega_0} \tag{14}$$

$$\text{parte imaginaria:} \quad \sqrt{L_1 L_2} = 2L_2 \implies \boxed{L_1 = 4L_2 = 4R\omega_0} \tag{15}$$