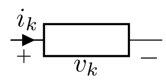
1 Ejercicio 2

a.

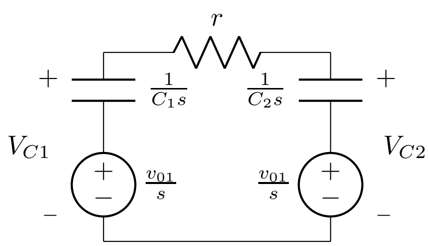
Teorema (Tellegen)**.**

Hipótesis. *Sea un circuito con n nodos y r ramas donde definimos un sentido en cada rama k como*  $\forall k \in [1..r]$

Tesis.

$$\sum_{k=1}^{r} v_k i_k = 0$$

b. i) Dibujamos el circuito en Laplace:



En régimen los condensadores van a terminar al mismo voltaje ya que al comportarse como un circuito abierto no circulará corriente por la resistencia, por lo cual la caída de voltaje en al misma será nula.

Calculamos por ejemplo $V_{C2}(s)$

$$V_{C_2}(s) = \frac{v_{02}}{s} + \overbrace{\overbrace{\frac{\frac{1}{C_2 s}}{r + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{C_1 s}}}^{\text{divisor}} \left(\frac{v_{01}}{s} - \frac{v_{02}}{s}\right)}^{\text{voltaje en } \frac{1}{C_2 s}} = \frac{1}{s}\left(v_{02} + \frac{v_{01} - v_{02}}{rC_2 s + \frac{C_2}{C_1} + 1}\right)$$

Cómo $sV_{C_2}(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho podemos usar el teorema del valor final para calcular el voltaje final de C_2 que como dijimos es el mismo que el de C_1.

$$\lim_{t\to+\infty} v_{C_1}(t) = \lim_{t\to+\infty} v_{C_2}(t) = \lim_{s\to 0} sV_{C_2}(s) = v_{02} + \frac{v_{01} - v_{02}}{\frac{C_2}{C_1} + 1} = \frac{v_{02}C_2 + v_{01}C_1}{C_1 + C_2}$$

Claramente esto es un promedio ponderado de los voltajes originales.

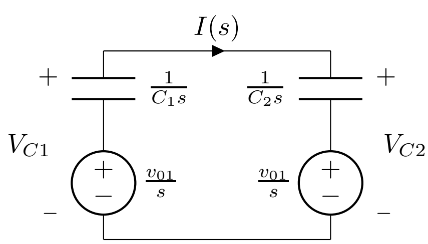
ii) De la parte anterior podemos deducir la energía final almacenada en los condensadores:
$E_f = \left(\frac{v_{02}C_2+v_{01}C_1}{C_1+C_2}\right)^2 \frac{C_1+C_2}{2} = \frac{(v_{02}C_2+v_{01}C_1)^2}{2(C_1+C_2)}$
La energía inicial es la almacenada inicialmente en los condensadores:

$$E_i = \frac{C_1 v_{01}^2}{2} + \frac{C_2 v_{02}^2}{2}$$

Por el teorema de Tellegen la potencia entregada a la resistencia es igual a la potencia entregada por los condensadores en todo instante de tiempo, por lo tanto el trabajo realizado sobre la resistencia será la diferencia de energías inicial y final almacenada en los condensadores.

$$\begin{aligned}
W_r &= E_f - E_i = \frac{1}{2}\left(C_1 v_{01}^2 + C_2 v_{02}^2 - \frac{C_2^2 v_{02}^2 + 2C_1C_2v_{01}v_{02} + C_1^2 v_{01}^2}{C_1+C_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\cancel{C_1^2 v_{01}^2} + C_2C_1v_{01}^2 + C_2C_1v_{02}^2 + \cancel{C_2^2 v_{02}^2} - \cancel{C_2^2 v_{02}^2} - 2C_1C_2v_{01}v_{02} - \cancel{C_1^2 v_{01}^2}}{C_1+C_2} \\
&= \frac{1}{2}C_1C_2\frac{(v_{01}-v_{02})^2}{C_1+C_2} = \frac{C_p {\Delta v_0}^2}{2}
\end{aligned}$$

c. i) Al igual que hoy dibujamos el circuito en Laplace:



$$V_{C_1}(s) = V_{C_2}(s) = \frac{\frac{1}{C_1 s}\frac{v_{02}}{s} + \frac{1}{C_2 s}\frac{v_{01}}{s}}{\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}} = \frac{1}{s}\frac{C_2 v_{02} + C_1 v_{01}}{C_1 + C_2}$$

$$\implies v_{C_1}(t) = v_{C_2}(t) = Y(t)\frac{C_2 v_{02} + C_1 v_{01}}{C_1 + C_2}$$

Ahora calculamos la corriente:

$$I(s) = \frac{\Delta v_0}{s}\frac{1}{\frac{1}{C_1 s} + \frac{1}{C_2 s}} = C_p \Delta v_0 \implies i(t) = C_p \Delta v_0 \delta(t)$$

ii) La diferencia entre las energías es igual al circuito de la parte anterior ya que tanto los voltajes iniciales como finales son iguales.

$$\Delta E = E_f - E_i = \frac{C_p {\Delta v_0}^2}{2}$$

iii) Claramente esta diferencia es igual al trabajo realizado sobre la resistencia en el circuito de la parte anterior.

Esto es consistente ya que este circuito es el de la parte anterior con $r = 0$.

Por lo tanto esta diferencia se puede ver como el trabajo realizado sobre el cable ideal, que no modela otra cosa que una resistencia tendiendo a 0.

En el caso completamente ideal se podría decir que este trabajo se debe a la delta de corriente que circula por el cable ideal, que nuevamente representa el límite de la distribución asociada a la función corriente cuando $r \to 0$.