Estabilidad

Transparencias
Introducción a la Teoría de Control

R. Canetti 2014

Estabilidad

- Es una propiedad cualitativa de los sistemas.
- Es la primer propiedad que debe cumplir un sistema de control.
- El problema de estabilidad está presente en cada problema importante de control.
- Su estudio ha tenido períodos de fuerte impulso motivados por la necesidad de dar respuestas a problemas muy importantes, fundamentalmente de origen productivo. Por ejemplo:

    - Estabilidad de sistemas mecánicos a partir de la revolución industrial (Watt, Airy, Maxwell, Routh, Hurwitz, Lyapunov, etc.)
    - Estabilidad en problemas de comunicación y señales (Nyqüist, Black, Bode, etc.)

<u>Un período importante: Revolución Industrial, Inglaterra, s. XVIII y XIX</u>

Algunos de los motores principales de la Revolución Industrial en Inglaterra:

- fundición de hierro.
- manufactura de textiles.
- máquina de vapor.

En ambiente con presencia de:

- mano de obra muy barata (sobre-explotada).
- transporte (red de canales y luego FF.CC.)
- materias primas: Hierro, Carbón, Lana, Algodón.
- colonias con materias primas y mercado internacional.

Industria Textil. Manufactura de hilos y tejido

- Centenares de innovaciones (y patentes) entre 1730 y 1850. Entre ellas, por ejemplo: la lanzadera volante (1734).

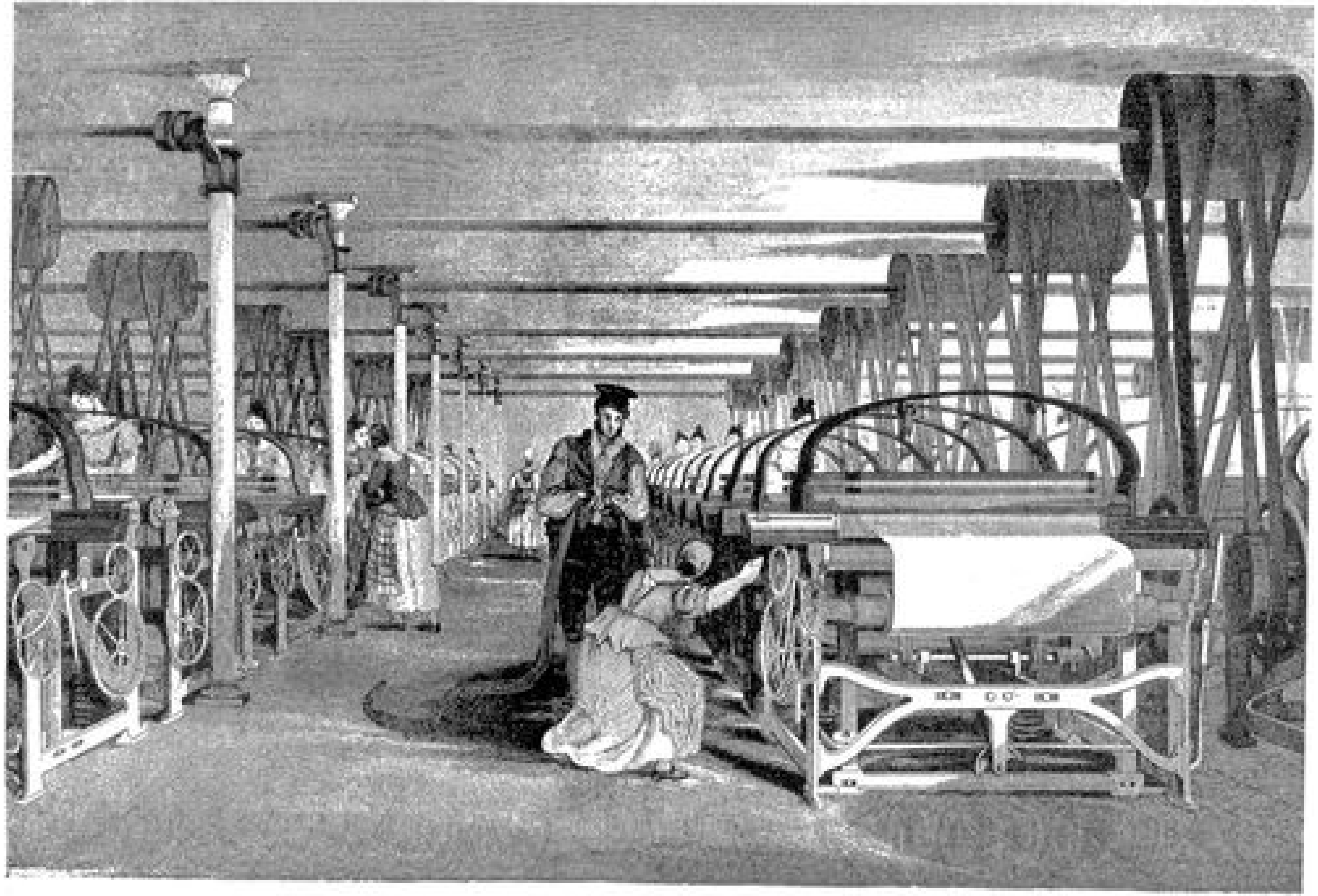
- Telares mecánicos. Durante el primer período, energizados por molinos de agua. Luego por máquinas de vapor.

- En 1775 Watt diseña una máquina de vapor eficiente, que puede ser producida en cantidad por la industria siderúrgica local.

Número de telares mecánicos en Inglaterra.

Año	1803	1820	1829	1833
Telares	2400	14650	55500	100000

(según Hills, Richard Leslie (1993). *Power from Steam: A History of the Stationary Steam Engine*. Cambridge University Press. ISBN 978-0-521-45834-4)

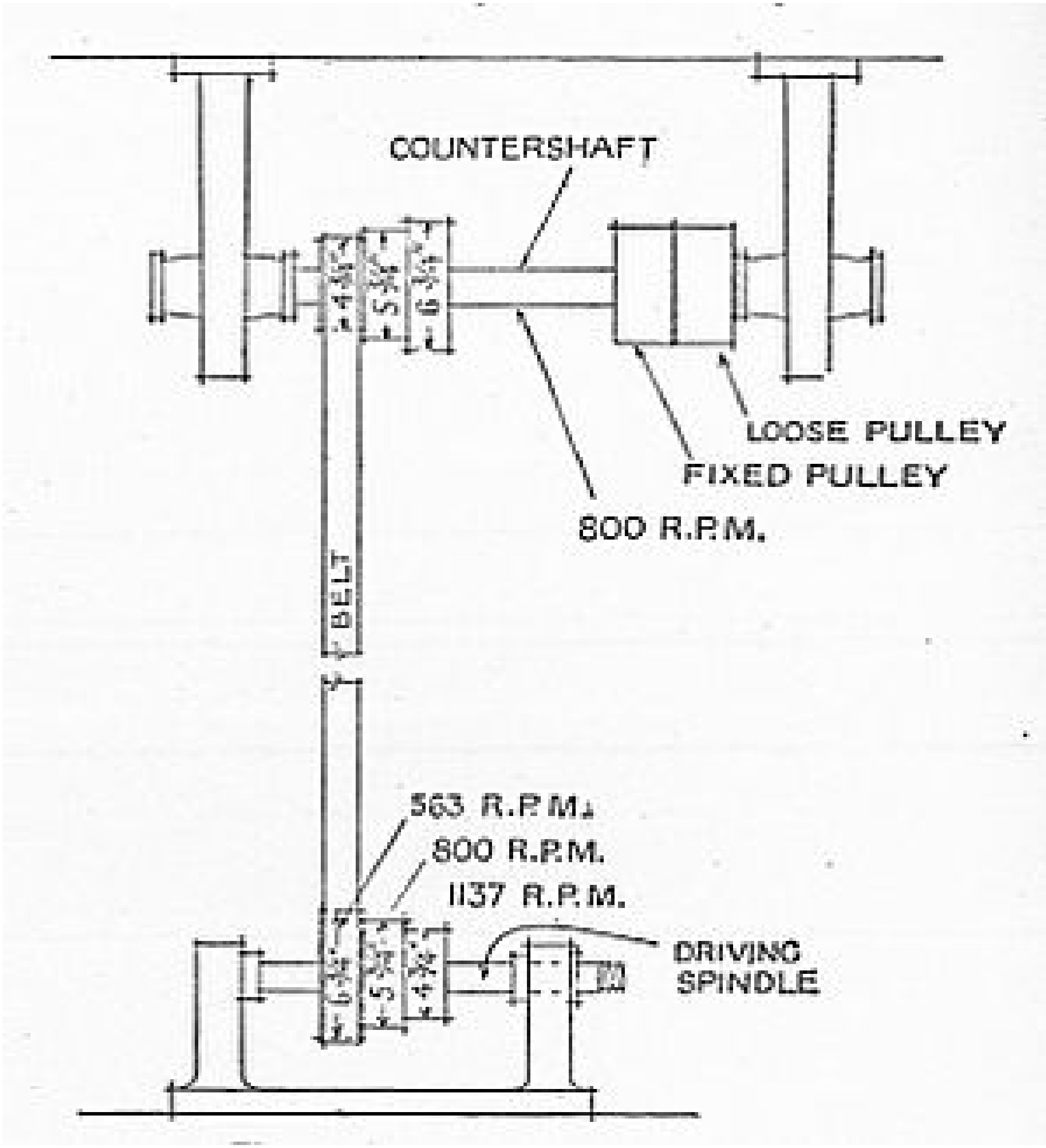


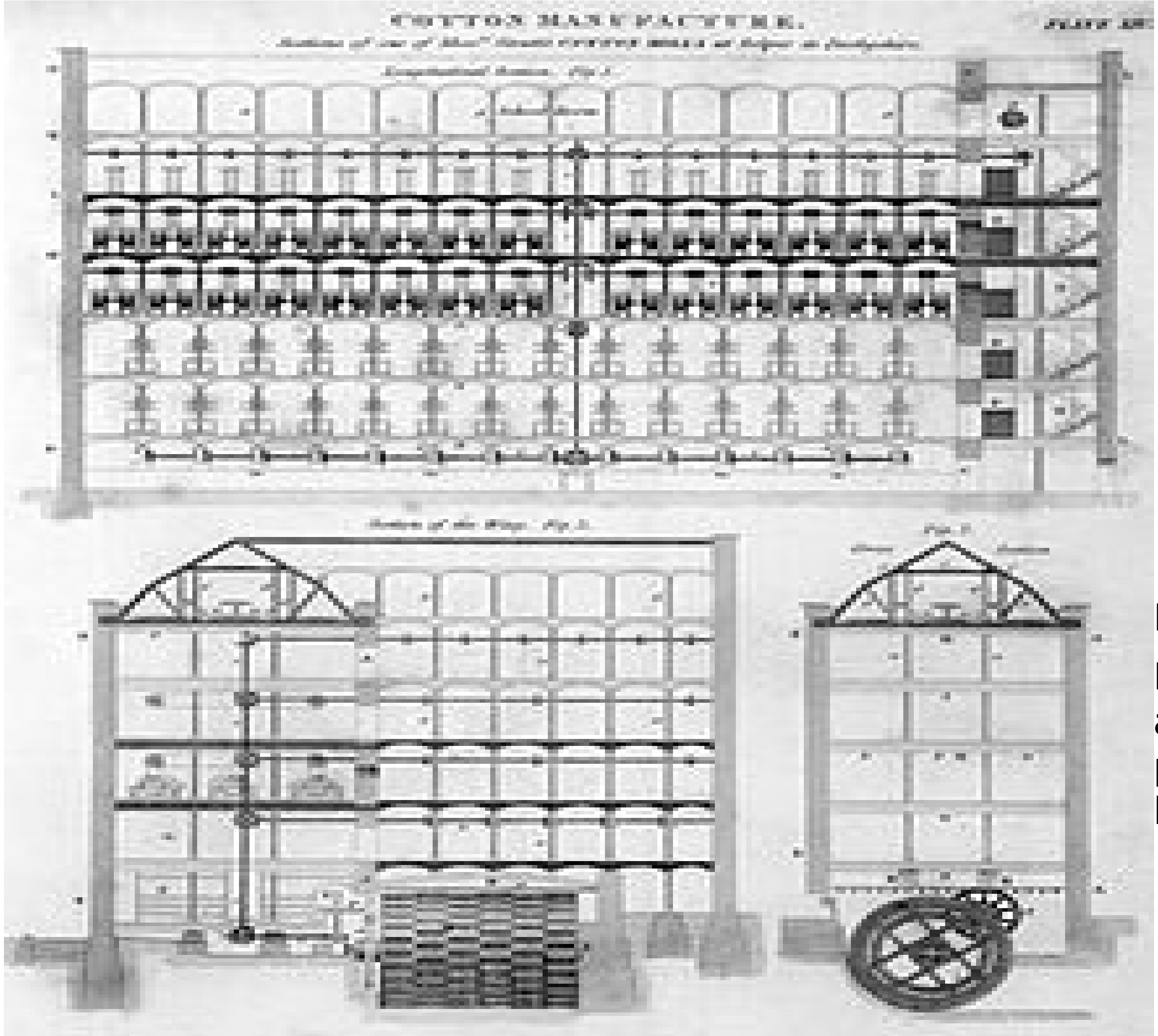
Industria de Tejidos (“fabric”) en Inglaterra, siglo XIX. De: “History of the cotton manufacture in Great Britain” by Sir Edward Baines

Trasmisión de potencia.

Problema crucial:

- La fuente de energía mecánica es única (molino o motor).
- Es distribuida a toda la factoría a través de ejes y árboles, poleas y correas.
- Poder variar esta velocidad.
- Una vez fijada, mantener constante la velocidad de las máquinas.





Molino fabril en Derbyshire.

Nótese la rueda de agua y los árboles de trasmisión de potencia, distribuyendo en todos los pisos.

Jedediah Strutt, North Mill at Belper, Derbyshire. A stylisted diagram showing the construction, waterwheel and line shafts. Circa 1819.

Siglo XX

Máquina de vapor

- En 1775 James Watt diseña una máquina de vapor eficiente, que puede ser producida en cantidad por la industria siderúrgica local.
- Se convierte en alternativa muy atractiva como motor en lugar de los molinos.
- Molino importante (Albion) operativo con máquina de vapor en 1786.
- Necesidad de regular en forma más precisa la velocidad de la máquina.
- En 1788 Watt introduce un mecanismo ingenioso para regular la velocidad.

<u>“Gobernador” de Watt (1788)</u>. Busca resolver la regulación de velocidad de la máquina de vapor. Fue muy exitoso. Aún hoy existen dispositivos similares.

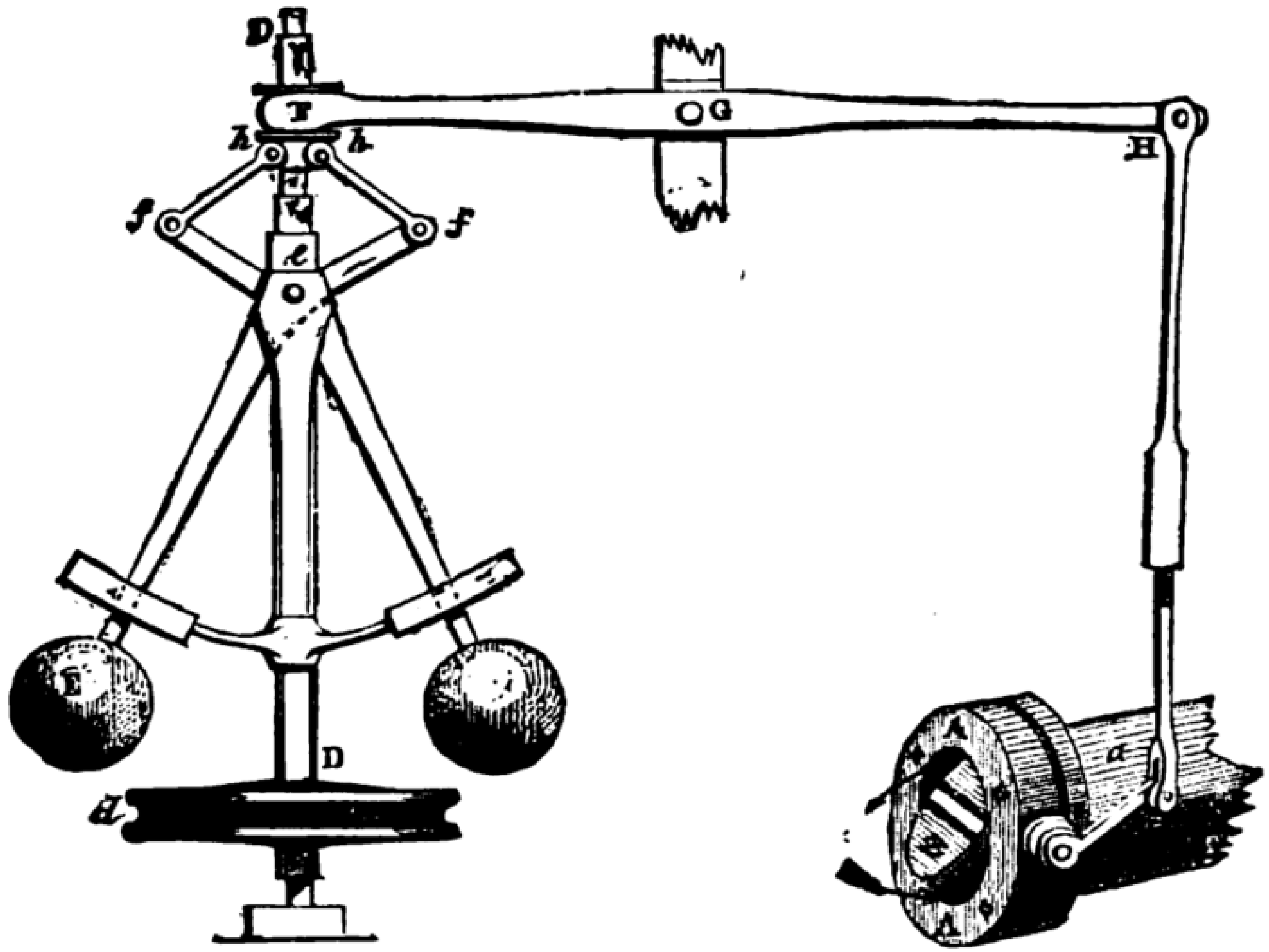
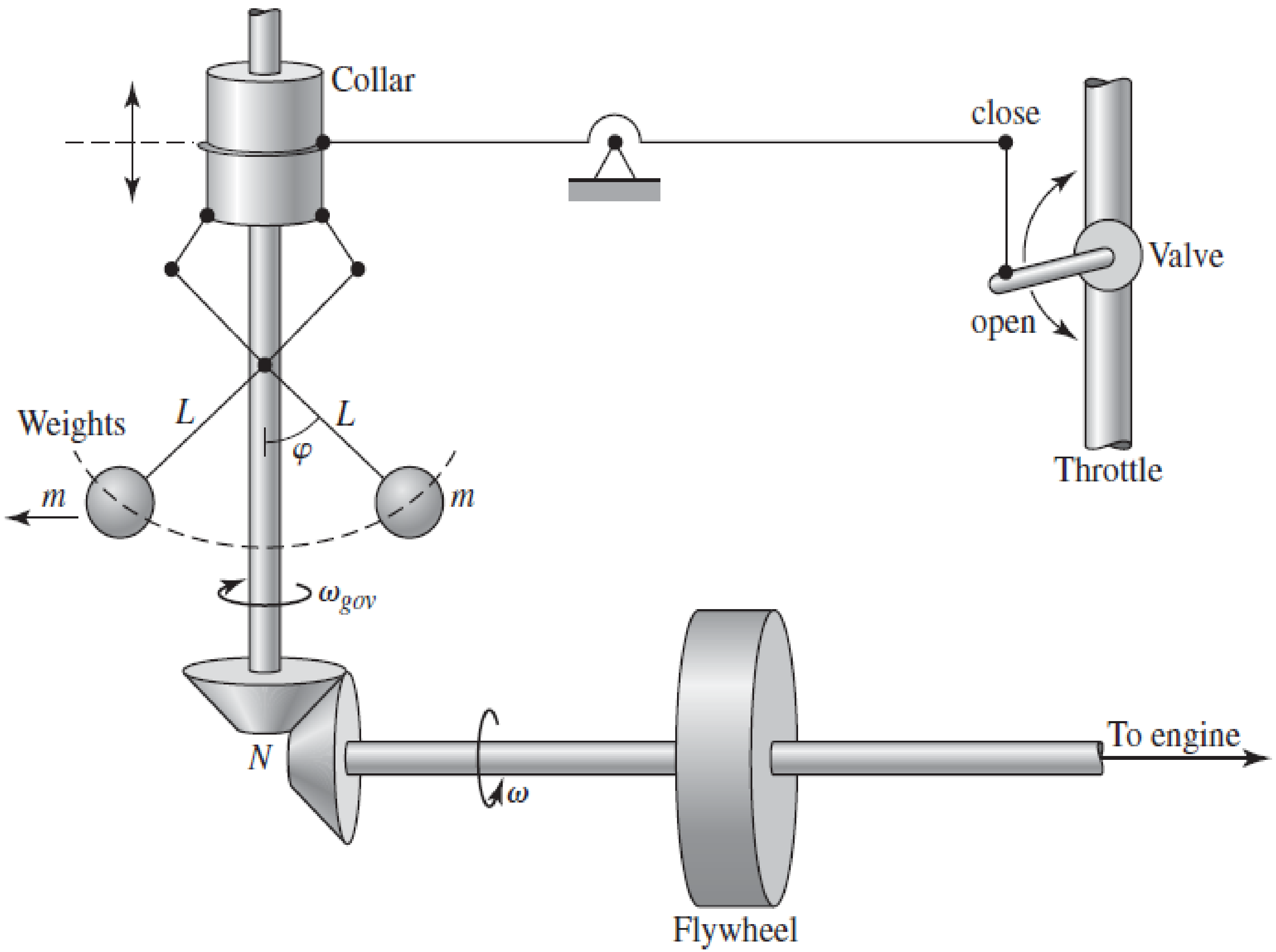
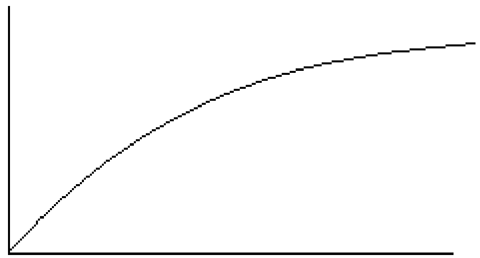


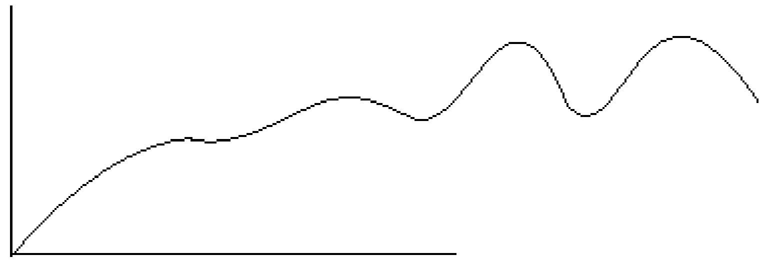
FIG. 4.—*Governor and Throttle-Valve.*

Esquema mecánico del funcionamiento del regulador (gobernador) de Watt.



A mediados del s. XIX se observa en forma cada vez más repetida un comportamiento “indeseable” de la velocidad de la máquina de vapor que se suponía debía estar mantenida por el regulador de esferas de Watt.





La mecánica había progresado mucho, obteniéndose dispositivos mejor construidos, con menos fricción, desgaste, etc.

Este problema fue motivo de estudio de muchos ingenieros, investigadores, etc. Y dió lugar al estudio de la estabilidad y al inicio de la “Teoría de Control”.

¿Es un problema de la “estructura del sistema”?

En lo que sigue se intentará formalizar el concepto y el análisis de la estabilidad.
Básicamente buscamos que el sistema tenga propiedades del estilo de:

- respuesta nula a estímulo nulo.

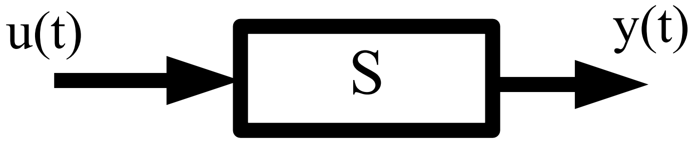
- respuestas “pequeñas” a estímulos “pequeños”.

- respuesta “cada vez más pequeñas” a estímulos “cada vez más pequeños”.

- no responder en forma divergente a pequeñas perturbaciones.

Estabilidad

Estabilidad BIBO (Bounded Input – Bounded Output)



Sea un sistema U,Y, S.

Con $\mathcal{C}_u$, $\mathcal{C}_y$, espacios normados.

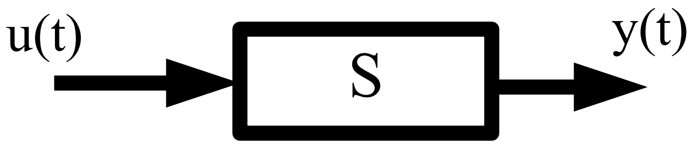
Se dice que el sistema S es estable BIBO si y solo si se cumple que:

1) $\forall\, U_m \in R^+ \;, \exists\, Y_m \in R^+ \;/\quad si \;\; \|u(t)\| \leq U_m \quad \forall t \;\; \Rightarrow \;\; \|y(t)\| \leq Y_m \quad \forall t$

2) $\forall\, Y_m \in R^+ \;, \exists\, U_m \in R^+ \;/\quad si \;\; \|u(t)\| \leq U_m \quad \forall t \;\; \Rightarrow \;\; \|y(t)\| \leq Y_m \quad \forall t$

- La cota de la salida depende solo de la cota de la entrada. No depende de la entrada.
- Se parece a la definición que conocíamos de BIBO-estabilidad, pero no es lo mismo.

Por ejemplo. Los siguientes sistemas, ¿son BIBO-estables?



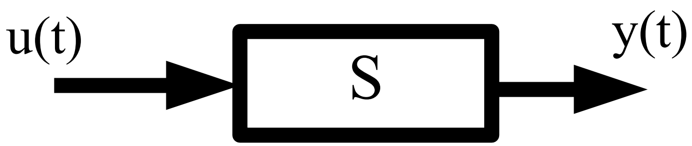
$y(t) = sg\ (\ u(t)\ )$ con $sg(\ u(t)\ ) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } u(t) < 0 \end{cases}$

$y(t) = sen\ (\ u(t)\ )$

$y(t) = sen\ (\ u(t) + \pi/2)$

$y(t) = cos\ (\ u(t) + \pi/2)$

Ejemplo:



$y(t) = sg\,(\,u(t)\,)$ con $sg(\,u(t)\,) = \begin{cases} 1 & \text{si } u(t) \geq 0 \\ -1 & \text{si } u(t) < 0 \end{cases}$

La condición 1) es satisfecha.

En efecto, elegida U_m (cualquiera), la cota $Y_m=1$ verifica, ya que no importa qué entrada acotada se aplique, la salida es tal que $|y(t)| \leq 1$

En cambio la condición 2) no es satisfecha. No existe ninguna cota para las entradas que haga que $|y(t)| \leq Y_m$, si $Y_m < 1$.

Es decir, no se puede obtener salidas tan pequeñas como se desee.

Por lo tanto, este sistema <u>no es estable</u>.

Los otros ejemplos quedan como ejercicio.

Proposición:

Si S es lineal, entonces 1) $\rightarrow$ 2)

Demo:

Hipótesis: se cumple 1), por lo tanto, dado U_m

$$\exists Y_m \in R^+ \;/\quad si \;\; \| u(t) \| \le U_m \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \| y(t) \| \le Y_m \quad \forall t$$

Para probar 2): si es dado $\bar{Y}_m$, definiendo la cota de entrada: $\bar{U}_m$

$$\exists \bar{U}_m = \left(\frac{U_m}{Y_m}\right) \bar{Y}_m \quad , \qquad si \;\; \| u(t) \| \le \bar{U}_m \quad \forall t \;\; \Rightarrow \;\; \| \frac{Y_m}{\bar{Y}_m} u(t) \| \le \frac{Y_m}{\bar{Y}_m} \bar{U}_m \; = \; U_m \;\; \forall t$$

Entonces para estas entradas $\frac{Y_m}{\bar{Y}_m} u(t)$ al ser $\le U_m$, por 1) se cumple que las

salidas correspondientes ($\frac{Y_m}{\bar{Y}_m} y(t)$) son $\le Y_m$

$$\| \frac{Y_m}{\bar{Y}_m} y(t) \| \le Y_m \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \| y(t) \| \le \frac{\bar{Y}_m}{Y_m} Y_m \; = \; \bar{Y}_m \;\; \forall t$$, por lo que $\bar{U}_m$ cumple !

Obsérvese que la definición de estabilidad BIBO implica:

- entradas uniformemente acotadas producen salidas uniformemente acotadas.
- la cota de la salida es solo función de la cota de la entrada.
- para obtener salidas tan pequeñas como se desee, se necesitan entradas suficientemente pequeñas.

Si además el sistema es lineal:

- entradas muy próximas, producen salidas muy próximas.
- el apartamiento de la salida respecto una salida nominal, es función sólo del apartamiento de la entrada respecto una entrada nominal.

Criterios de estabilidad

Incluso si un sistema es lineal, verificar la estabilidad (así como se define) no es nada sencillo.

En principio deberíamos verificar que cualquiera sea el número real positivo Um podamos encontrar una cota Ym, probando para cada entrada posible que está acotada por Um !!! y luego repetir eso para todo Um posible !!!

Por eso es necesario establecer criterios, es decir "tests", "pruebas", condiciones más sencillas de verificar que la definición.

Vamos a enunciar criterios de estabilidad para sistemas lineales, desde los criterios más generales a los más particulares.

Haremos las demostraciones a medida que los enunciamos.

Criterios de estabilidad

1) Para Sistemas Lineales.

Si el Sistema S es tal que:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} H(t,\sigma)\,u(\sigma)\,d\sigma$$

Entonces S es BIBO estable $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\exists\ L < \infty \ / \quad \int_{-\infty}^{t} \|H(t,\sigma)\|\,d\sigma < L \quad \forall t}$$

Criterios de estabilidad

1) Para Sistemas Lineales.

Si el Sistema S es tal que:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} H(t,\sigma)u(\sigma)\,d\sigma$$

Entonces S es BIBO estable $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\exists\; L<\infty \;/\; \int_{-\infty}^{t} \|H(t,\sigma)\|\,d\sigma < L \quad \forall t}$$

2) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo.

Si el Sistema S es tal que:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} H(t-\sigma)u(\sigma)\,d\sigma$$

Entonces S es BIBO estable $\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\exists\; L<\infty \;/\; \int_{0}^{\infty} \|H(\tau)\|\,d\tau < L}$$

3) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo, una entrada-una salida.

Si el Sistema S es tal que: $$y(t)=\int_{t_0}^{t} h(t-\sigma)u(\sigma)\,d\sigma$$

Entonces S es BIBO estable $\Leftrightarrow$ $$\boxed{\exists\ L<\infty \ \big/ \int_{0}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < L}$$

3) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo, una entrada-una salida.

Si el Sistema S es tal que: $$y(t)=\int_{t_0}^{t} h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma$$

Entonces S es BIBO estable $\Longleftrightarrow$ $$\boxed{\exists\ L<\infty \ / \ \int_0^{\infty} |h(\tau)|d\tau < L}$$

4) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo, una entrada-una salida, de parámetros concentrados.

Si el Sistema S es tal que: $$y(t)=\int_{t_0}^{t} h(t-\sigma)u(\sigma)d\sigma \qquad H(s)=L\{h(t)\}$$

$$con \qquad H(s)=\frac{\alpha\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_j)}$$

Entonces S es BIBO estable $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{Re}\{p_j\} < 0}$ En principio, ¡¡¡ muy sencillo !!!

Demos:

1) Para Sistemas Lineales. No lo demostraremos.

2) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo.

Supongamos válido el criterio 1)

Si S es invariante en t: $H(t,\sigma) = H(t-\sigma)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{t} \|H(t,\sigma)\| d\sigma = \int_{-\infty}^{t} \|H(t-\sigma)\| d\sigma = -\int_{\infty}^{0} \|H(\tau)\| d\tau = \int_{0}^{\infty} \|H(\tau)\| d\tau$$ donde τ=t-σ

Entonces, el criterio 1) queda: $\exists\ L < \infty \Big/ \int_{0}^{\infty} \|H(\tau)\| d\tau < L$ lqqd.

Demos:

1) Para Sistemas Lineales. No lo demostraremos.

2) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo.

Supongamos válido el criterio 1)

Si S es invariante en t: $H(t,\sigma) = H(t-\sigma)$ entonces

$$\int_{-\infty}^{t} \|H(t,\sigma)\| d\sigma = \int_{-\infty}^{t} \|H(t-\sigma)\| d\sigma = -\int_{\infty}^{0} \|H(\tau)\| d\tau = \int_{0}^{\infty} \|H(\tau)\| d\tau$$ donde τ=t-σ

Entonces, el criterio 1) queda: $\exists \ L < \infty \Big/ \int_{0}^{\infty} \|H(\tau)\| d\tau < L$ lqqd.

3) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo, una entrada-una salida.

Ahora la matriz $H(\tau) = \{ h(\tau) \}$, es una matriz con un solo elemento. Eligiendo como $\|H(\tau)\| = |h(\tau)|$ el criterio queda: $\exists \ L < \infty \Big/ \int_{0}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < L$

4) Para Sistemas Lineales invariantes en el tiempo, una entrada-una salida, de parámetros concentrados.

$$h(t)=L^{-1}\{H(s)\} \ con \quad H(s)=\frac{\alpha\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_j)}$$

$$\Rightarrow \quad h(t)=A\,\delta(t)+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{\mu_i-1} A_{ij}\,e^{\sigma_i t}\ t^j\ sen(\omega_i t+\varphi_{ij})$$

Hemos agrupado los n polos en r polos reales p_i o parejas complejas conjugadas $\{p_i, \bar{p}_i\}$ distintas, con multiplicidad μ_i. $\quad p_i = \sigma_i + j\,\omega_i$

Para que | $h(\tau)$ | sea integrable (y por el criterio 3 el sistema sea estable), los sumandos que conforman $h(\tau)$ deben tender a cero suficientemente rápido.

La condición necesaria y suficiente para que | $h(\tau)$ | sea integrable es que todos los $\sigma_i < 0$. Con lo que se prueba el criterio.

En resumen, alcanza con asegurar que Re$\{p_i\} < 0$, parece muy sencillo!!!

Pero, ¿es realmente sencillo?

Por ejemplo:

$$d(s)=s^{10}+3\ s^{9}+2\ s^{8}+3\ s^{7}+4\ s^{6}+5\ s^{5}+2\ s^{4}-7\ s^{3}+5\ s^{2}-2\ s+1$$

¿es el denominador de una función de transferencia estable?

¿y este otro?

$$d(s)=s^{10}+3\ s^{9}+2\ s^{8}+3\ s^{7}+4\ s^{6}+5\ s^{5}+2\ s^{4}+7\ s^{3}+5\ s^{2}+1$$

Polinomio Hurwitz

Se dice que un polinomio de coeficientes reales o complejos es Hurwitz si tiene todas sus raices con parte real negativa.

Condición necesaria (pero no suficiente) para que todas las raíces tengan parte real negativa:

1) Todos los coeficientes deben ser no nulos.

2) Todos los coeficientes deben tener el mismo signo.

Demo:

Como $d(s) = \beta \prod_{i=1}^{n} (s - p_j)$ Supongamos que todos los p_j tienen Re<0.

Recordando que si es un denominador estable, los polos pueden ser solo o bien reales negativos (-pj es real positivo) o complejos que agrupamos en parejas complejas conjugadas con parte real negativa como factor: $(s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2)$ con ζ y ω_n reales positivos.

Por lo que al realizar el producto indicado, no puede haber en ninguna potencia de s coeficientes de signo distinto al de β ni cancelaciones que conduzcan a coeficientes nulos.

¡Por lo que son denominadores de transferencias inestables! En el primer polinomio hay dos coeficientes de signo distinto al resto. En el otro falta el término en s^1.

$$d(s)=s^{10}+3\,s^9+2\,s^8+3\,s^7+4\,s^6+5\,s^5+2\,s^4-7\,s^3+5\,s^2-2\,s+1$$

$$d(s)=s^{10}+3\,s^9+2\,s^8+3\,s^7+4\,s^6+5\,s^5+2\,s^4+7\,s^3+5\,s^2+1$$

Pero este otro ¿será estable? (Hurwitz)

$$d(s)=s^{10}+3\,s^9+2\,s^8+3\,s^7+4\,s^6+5\,s^5+2\,s^4+7\,s^3+5\,s^2+2\,s+1$$

¡Por lo que son denominadores de transferencias inestables! En el primer polinomio hay dos coeficientes de signo distinto al resto. En el otro falta el término en s^1.

$$d(s)=s^{10}+3\,s^{9}+2\,s^{8}+3\,s^{7}+4\,s^{6}+5\,s^{5}+2\,s^{4}-7\,s^{3}+5\,s^{2}-2\,s+1$$

$$d(s)=s^{10}+3\,s^{9}+2\,s^{8}+3\,s^{7}+4\,s^{6}+5\,s^{5}+2\,s^{4}+7\,s^{3}+5\,s^{2}+1$$

Pero este otro ¿será estable? (Hurwitz)

$$d(s)=s^{10}+3\,s^{9}+2\,s^{8}+3\,s^{7}+4\,s^{6}+5\,s^{5}+2\,s^{4}+7\,s^{3}+5\,s^{2}+2\,s+1$$

A priori, no lo sabemos. ¡¡¡Habría que calcular sus raices!!!

Si estuviéramos diseñando, quizás no conozcamos algunos de sus coeficientes (dependen de parámetros de diseño como ganancias, masas, resistencias, coeficientes de fricción, longitudes de palancas ...) ¿Como resolver esto?

Como se resolvió esto. Un poco de historia:

G.B. Airy fue uno de los primeros en trabajar en el tema de estabilidad de la regulación de velocidad.

Fue Director del Observatorio de Cambridge, ocupó la Cátedra Lucasiana de Matemáticas (la cátedra que ocupó Isaac Newton) y luego astrónomo real, dirigiendo el Observatorio de Greenwich, de hecho fue quién lo llevó al nivel más alto.

Estaba motivado por mantener constante la velocidad de giro de un telescopio durante observaciones prolongadas. Presentó trabajos acerca de esto entre 1840 y 1851.

Estudió el efecto de la amortiguación en la estabilidad.

<u>Maxwell 1831 – 1879</u>

Graduado del Trinity College (Cambridge) en 1854.

Destacados estudios en matemática aplicada y en física: p.ej.: termodinámica y electromagnetismo. Estudió el problema de la estabilidad de los reguladores de velocidad como el de Watt.

Presentó los resultados en “On Governors” el 20 Febrero de 1868.

Fragmentos de las actas de la "Royal Society of London" del 5 de Marzo de 1868 en que Maxwell lee su trabajo "On governors":

March 5, 1868.

JOHN PETER GASSIOT, Esq., V.P., in the Chair.

The following communications were read:—

I. "On Governors." By J. Clerk Maxwell, M.A., F.R.SS.L. & E.

Received Feb. 20, 1868.

A Governor is a part of a machine by means of which the velocity of the machine is kept nearly uniform, notwithstanding variations in the driving-power or the resistance.

vernor. This condition is mathematically equivalent to the condition that all the possible roots, and all the possible parts of the impossible roots, of a certain equation shall be negative.

I have not been able completely to determine these conditions for equations of a higher degree than the third; but I hope that the subject will obtain the attention of mathematicians.

The actual motions corresponding to these impossible roots are not generally taken notice of by the inventors of such machines, who naturally confine their attention to the way in which it is *designed* to act; and this is generally expressed by the real root of the equation. If, by altering the adjustments of the machine, its governing power is continually increased, there is generally a limit at which the disturbance, instead of subsiding more rapidly, becomes an oscillating and jerking motion, increasing in violence till it reaches the limit of action of the governor. This takes place when the possible part of one of the impossible roots becomes positive. The mathematical investigation of the motion may be rendered practically useful by pointing out the remedy for these disturbances.

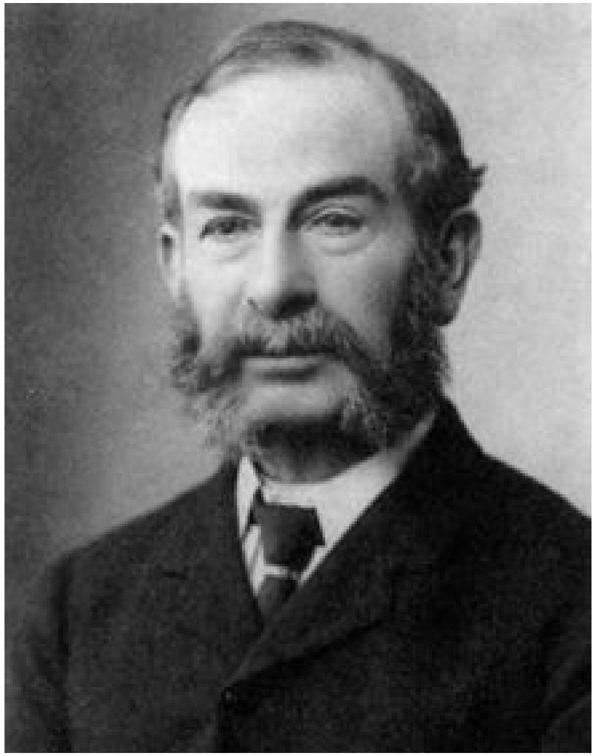
En este trabajo,

- Maxwell llegó a la conclusión que para que el sistema fuera estable, el polinomio característico debía tener todas sus raíces con parte real positiva.

- Pero no era capaz de establecer condiciones sencillas para determinar esto en polinomios de orden mayor a tres. Es decir, un criterio que permitiera evitar la necesidad de calcular todas las raices.

Este problema quedó abierto varios años hasta 1877.

Edward John Routh (1831-1907)



Routh obtiene B.A. (1849) y M.A. (1853) con medalla de oro en University College de Londres, donde fue alumno de De Morgan. Fue estudiante del Peterhouse, Cambridge. En 1854, Routh se gradúa en Cambridge obteniendo el primer lugar, el segundo será James Clerk Maxwell. Comparten juntos el premio Smith ese año.

En 1864 se casa con la hija mayor de G.B. Airy.

Routh resuelve este problema en 1877 en su trabajo " A treatise on the stability of a given state of motion", con el que obtiene el premio Adams.

En el jurado de dicho premio estaba precisamente Maxwell.

Se dice que su exposición en el premio Adams comenzó: "Me he enterado recientemente que mi buen amigo James Clerk Maxwell ha tenido dificultades con un problema relativamente trivial...". (Según J.G. Truxal, "Introductory System Engineering")

En 1885, y en forma totalmente independiente, Hurwitz (en Suiza) resuelve el mismo problema con una metodología diferente. No estaba en conocimiento de los trabajos de Routh. Luego se prueba que ambos criterios (Routh y Hurwitz) son equivalentes.

Criterio de Routh-Hurwitz (1877)

Sea el polinomio real: $d(s) = d_0\, s^n + d_1\, s^{n-1} + d_2\, s^{n-2} + d_3\, s^{n-3} + \ldots + d_{n-1}\, s^1 + d_n$

Se construyen los polinomios
$$\begin{cases} f_n(s) = d_0\, s^n + d_2\, s^{n-2} + d_4\, s^{n-4} + d_6\, s^{n-6} + \ldots \\ f_{n-1}(s) = d_1\, s^{n-1} + d_3\, s^{n-3} + d_5\, s^{n-5} + d_7\, s^{n-7} + \ldots \end{cases}$$

$d(s) = f_n(s) + f_{n-1}(s)$

A partir de ellos se calcula la sucesión de polinomios $f_i(s)$, $i= n-2, \ldots , 0$ según el algoritmo de Euclides: cada nuevo polinomio es el resto de la división entera de los dos anteriores.

$f_{i-1}(s) = R\,[f_{i+1}(s) \,/\, f_i(s)]$ al dividir: $f_{i+1}(s) = (\alpha_{i+1.}.s).f_i(s) + f_{i-1}(s)$

Se obtiene una sucesión de polinomios de grado decreciente, y de potencias pares o impares alternadamente. Es muy fácil hacerlo en forma sistemática en la Tabla:

$$
\begin{array}{l|l}
d_0 \; s^n + d_2 \; s^{n-2} + d_4 \; s^{n-4} + d_6 \; s^{n-6} + \dots & d_1 \; s^{n-1} + d_3 \; s^{n-3} + d_5 \; s^{n-5} + \dots \\ \hline
-d_0 \; s^n - \dfrac{d_0 d_3}{d_1} s^{n-2} - \dfrac{d_0 d_5}{d_1} s^{n-4} - \dfrac{d_0 d_7}{d_1} s^{n-6} & \dfrac{d_0}{d_1} s
\end{array}
$$

cociente

$$
0 \quad s^n + \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_1} s^{n-2} + \frac{d_1 d_4 - d_0 d_5}{d_1} s^{n-4} + \frac{d_1 d_6 - d_0 d_7}{d_1} s^{n-6} + \dots
$$

resto

$f_n(s)$	d_0	d_2	d_4	. . .	d_n
$f_{n-1}(s)$	d_1	d_3	d_5	. . .	d_{n-1}
$f_{n-2}(s)$	a_1	a_2	a_3	. . .	
$f_{n-3}(s)$	b_1	b_2	b_3		
.					
.					
$f_0(s)$	g_1				

$$a1 = \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_1}$$

$$a2 = \frac{d_1 d_4 - d_0 d_5}{d_1}$$

$$a3 = \frac{d_1 d_6 - d_0 d_7}{d_1}$$

$$
\begin{array}{l|l}
d_0 \, s^n + d_2 \, s^{n-2} + d_4 \, s^{n-4} + d_6 \, s^{n-6} + \ldots & d_1 \, s^{n-1} + d_3 \, s^{n-3} + d_5 \, s^{n-5} + \ldots \\ \hline
-d_0 \, s^n - \dfrac{d_0 d_3}{d_1} s^{n-2} - \dfrac{d_0 d_5}{d_1} s^{n-4} - \dfrac{d_0 d_7}{d_1} s^{n-6} & \dfrac{d_0}{d_1} s
\end{array}
$$

cociente

$$
0 \, s^n + \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_1} s^{n-2} + \frac{d_1 d_4 - d_0 d_5}{d_1} s^{n-4} + \frac{d_1 d_6 - d_0 d_7}{d_1} s^{n-6} + \ldots
$$

resto

$f_n(s)$	d_0	d_2	d_4	$\ldots$	d_n
$f_{n-1}(s)$	d_1	d_3	d_5	$\ldots$	d_{n-1}
$f_{n-2}(s)$	a_1	a_2	a_3	$\ldots$	
$f_{n-3}(s)$	b_1	b_2	b_3		
.					
.					
$f_0(s)$	g_1				

$$a1 = \frac{d_1 d_2 - d_0 d_3}{d_1}$$

$$a2 = \frac{d_1 d_4 - d_0 d_5}{d_1}$$

$$a3 = \frac{d_1 d_6 - d_0 d_7}{d_1}$$

Criterio: El número de raíces de d(s) con parte real positiva es igual al número de cambios de signo en la sucesión de la primer columna.

Ejemplo 1: (Diseño de un plotter (ver en otro ppt).)

Sea $d(s)= s^3 + 5 s^2 + 5 s + 3k$ donde k es real.

$f_3(s)$	1	5
$f_2(s)$	5	3 k
$f_1(s)$	(25–3k) /5	
$f_0(s)$	3k	

Discutiendo el número de cambios de signo en la primer columna según k (real):

Polos inestables: 1 0 2

```
----------|---------------|--------------> k
k:        0              25/3
```

Para que d(s) sea Hurwitz, debe ser $0 < k < 25/3$.

Como puede verse, el criterio es muy útil para polinomios fijos, o que eventualmente pueda tener uno o dos parámetros que varíen.

¿Que pasa cuando hay coeficientes inciertos? Por ejemplo: los coeficientes no tienen exactamente el valor previsto.

¿ Qué podemos afirmar cuando todos los coeficientes de d(s) pueden variar ?

Por ejemplo: cada coeficiente varía dentro de un intervalo real.

¿ Qué podemos afirmar cuando todos los coeficientes de d(s) pueden variar ?
Por ejemplo: cada coeficiente varía dentro de un intervalo real.

Criterio de Kharitonov (1978)

Sea la familia de polinomios de coeficientes reales:

$$d(s) = d_0\, s^n + d_1\, s^{n-1} + d_2\, s^{n-2} + d_3\, s^{n-3} + \ldots + d_{n-1}\, s^1 + d_n$$

donde los coeficientes $d_i \in [\underline{d}_i, \overline{d}_i] \subset R$.

Todos los polinomios d(s) son Hurwitz si y solo si los polinomios f1, f2, f3, f4 son Hurwitz.

$$f_1(s) = \underline{d}_0\, s^n + \underline{d}_1\, s^{n-1} + \overline{d}_2\, s^{n-2} + \overline{d}_3\, s^{n-3} + \underline{d}_4\, s^{n-4} + \underline{d}_5\, s^{n-5}\ldots$$

$$f_2(s) = \overline{d}_0\, s^n + \underline{d}_1\, s^{n-1} + \underline{d}_2\, s^{n-2} + \overline{d}_3\, s^{n-3} + \overline{d}_4\, s^{n-4} + \underline{d}_5\, s^{n-5}\ldots$$

$$f_3(s) = \overline{d}_0\, s^n + \overline{d}_1\, s^{n-1} + \underline{d}_2\, s^{n-2} + \underline{d}_3\, s^{n-3} + \overline{d}_4\, s^{n-4} + \overline{d}_5\, s^{n-5}\ldots$$

$$f_4(s) = \underline{d}_0\, s^n + \overline{d}_1\, s^{n-1} + \overline{d}_2\, s^{n-2} + \underline{d}_3\, s^{n-3} + \underline{d}_4\, s^{n-4} + \overline{d}_5\, s^{n-5}\ldots$$

Kharitonov Vladimir Leonidovich

D.Sc., Professor of Department of Control Theory

Room 215
E-mail: khar@apmath.spbu.ru