Respuesta temporal, sistema de orden 2, ts, tl

Transparencias

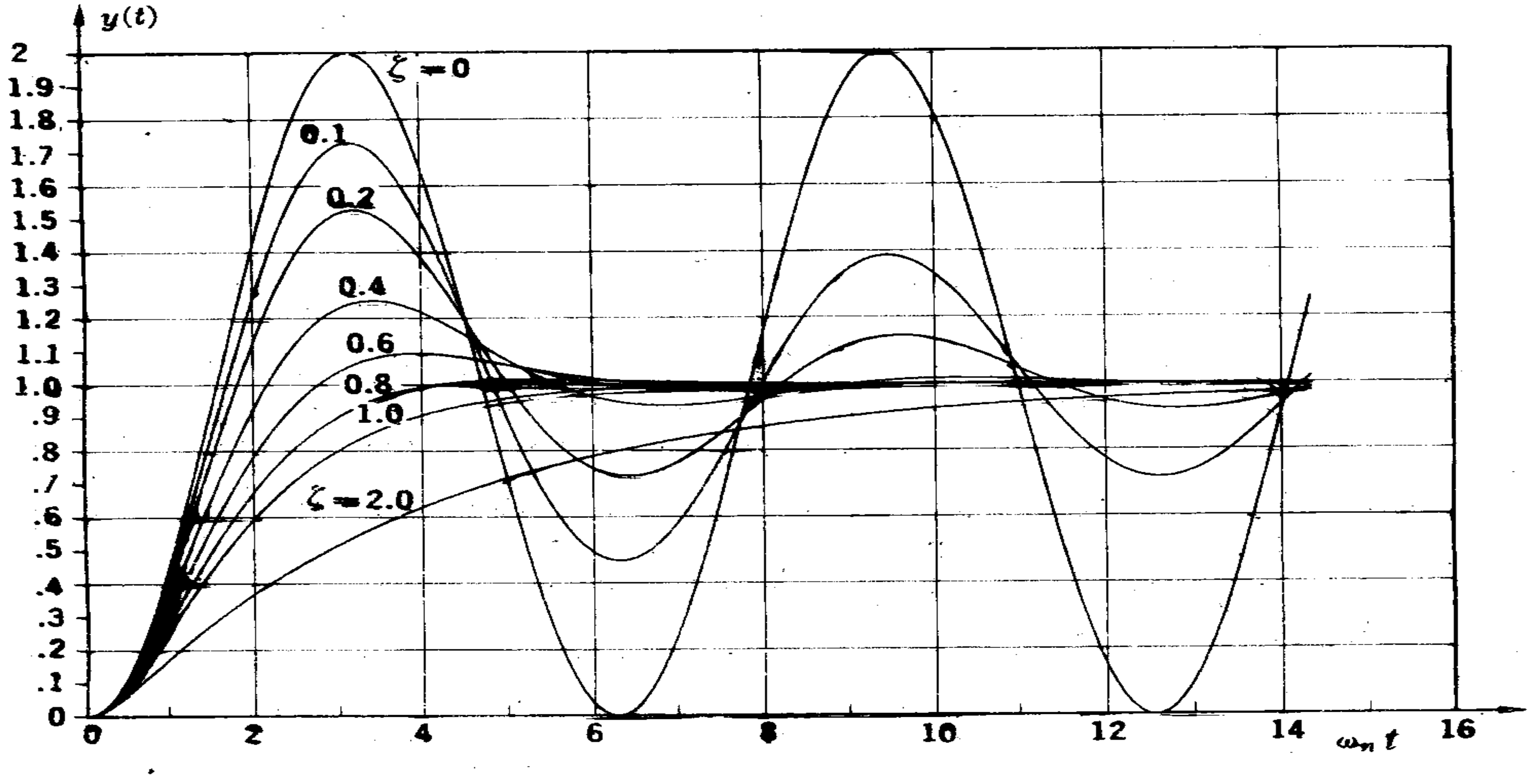
Introducción a la Teoría de Control

R. Canetti 2013

Respuesta a escalón, sistema de segundo orden.

Sist.: $H(s)=\dfrac{w_n^2}{s^2+2\zeta w_n s+w_n^2}$ Respuesta: $y(t)=1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\,sen(\omega_d t+artg(\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}))$

La gráfica muestra la respuesta del sistema subamortiguado ($0 < \zeta < 1$) vs. tiempo generalizado $w_n.t$



Estimación del tiempo de asentamiento ts.

Aproximación por envolvente.

- Para estimar el tiempo de asentamiento se usa una estimación conservadora: se aproxima por el tiempo en que la envolvente $1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta w_{nn} t}$ entra dentro de la banda del +/- 5%.
  De esta manera se asegura que la señal envuelta en su interior también entra dentro de la banda.

- Nótese que es una estimación conservadora: la señal de interés puede haber entrado en la banda en forma permanente, antes que la envolvente.

- Luego se aproximará la envolvente por una envolvente más sencilla: 1+/- $e^{-\xi wn}$

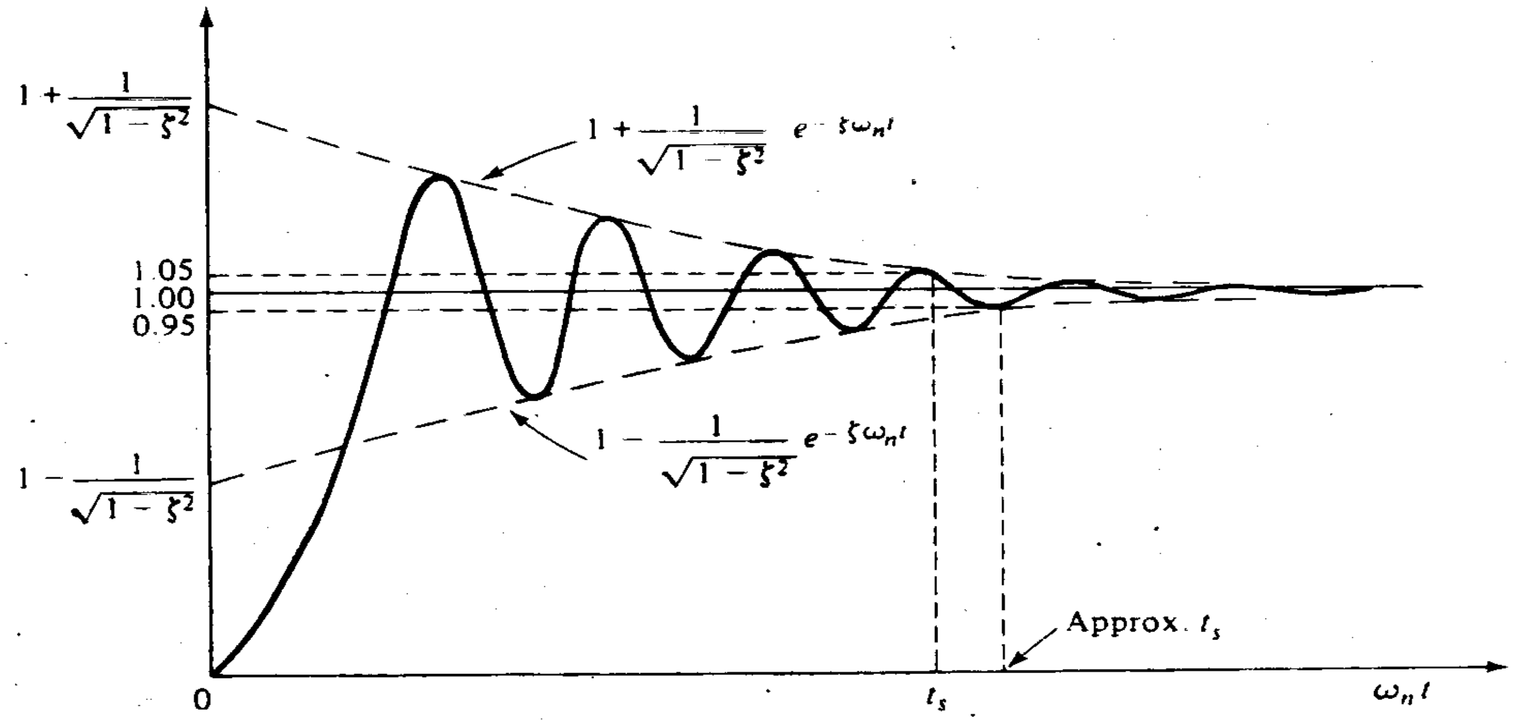


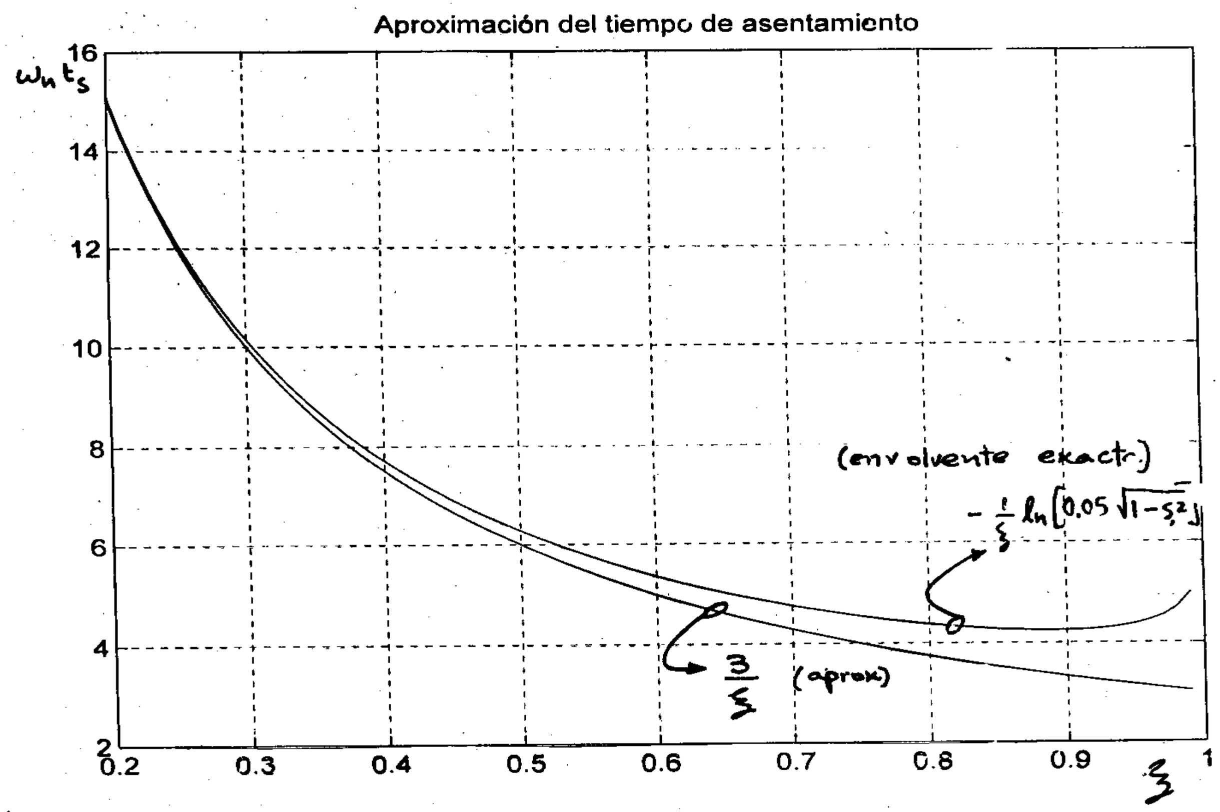
Figure 6-19 Approximation of settling time using the envelope of the decaying step response of a second order system ($0<\zeta<1$).

Se busca entonces cuando $\frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)}}e^{-\zeta w_n t}=0.05$ Además, si $\zeta < 0.8$ puede aproximarse bien por $e^{-\zeta w_n t}=0.05$ $\Rightarrow$ $\boxed{t_s \approx \frac{3}{\zeta . w_n}}$ (como el sistema de 1er.orden)

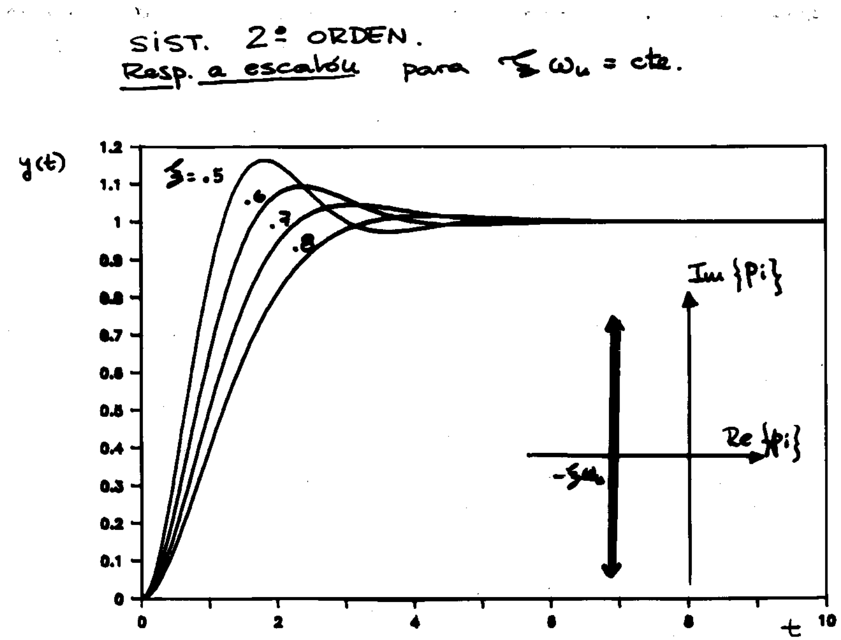
Hemos hecho dos aproximaciones:

- Estimar el ts por la envolvente exacta. Es una sobre-estimación de ts.
- Estimar la envolvente por otra envolvente: $e^{-\zeta w_n t}$. Es una sub-estimación.

¿qué tan buena es esta última aproximación? La figura muestra las dos aproximaciones de t_s.



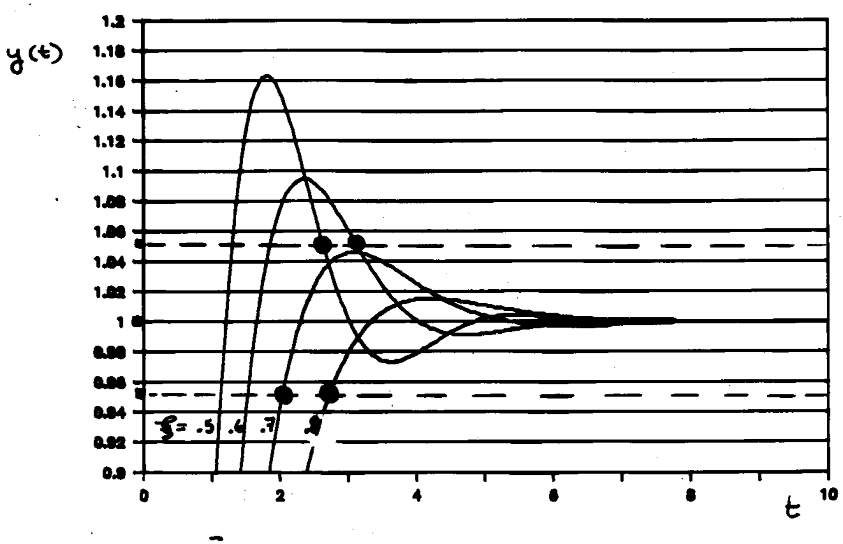
Como $t_s \approx \dfrac{3}{\zeta . w_n}$

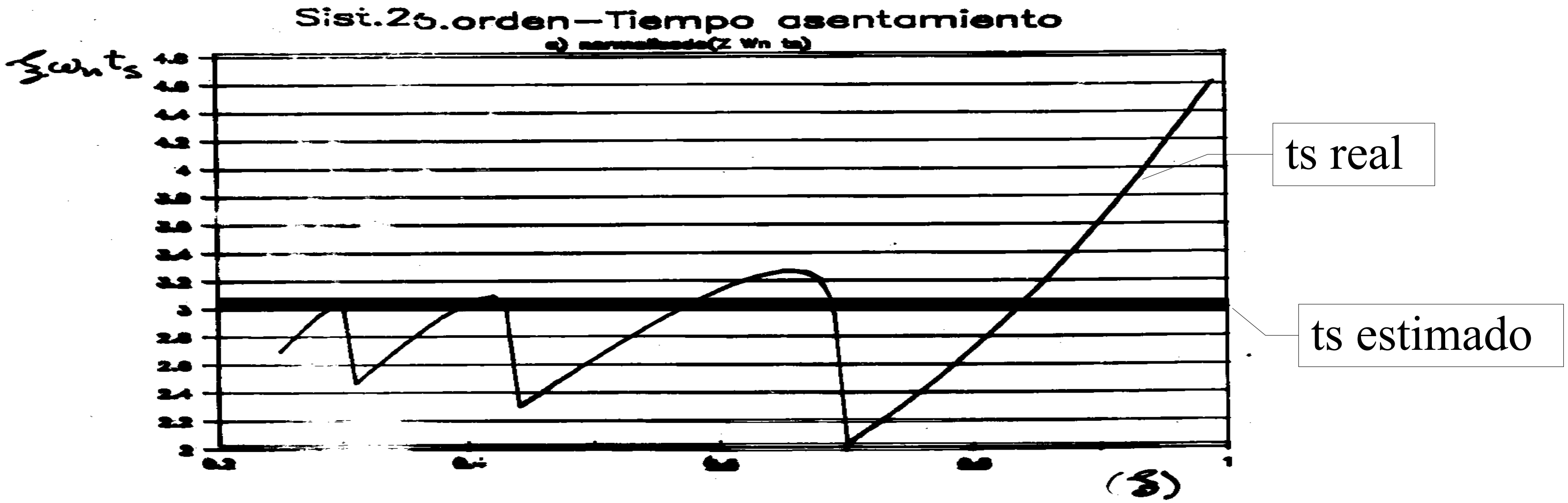


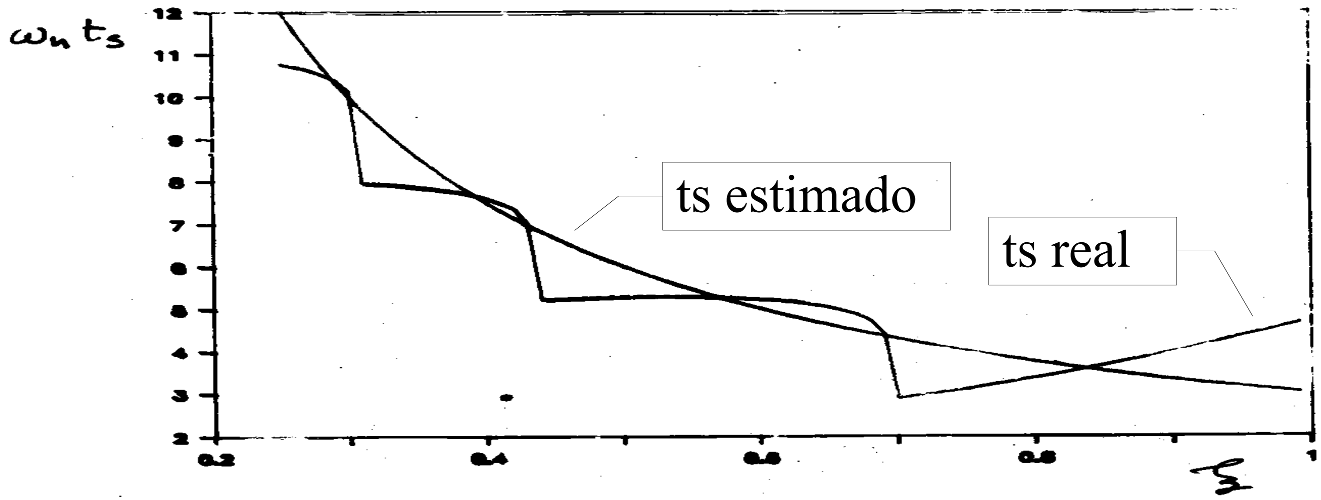
Los sistemas de segundo orden que estamos estudiando tienen dado su tiempo de asentamiento solo por la parte real de los polos.

Es decir, el lugar geométrico de los polos complejos conjugados que corresponden a sistemas de orden 2 con el mismo tiempo de asentamiento aproximado es la recta

Re {pi} = $-\zeta\omega_n = -3/ts$







Comparación entre ts real y estimado.

Tiempo de levantamiento (t_l, t_r) del 0 al 100%

El tl de 10% a 90% no tiene una expresión analítica sencilla. En cambio, en el sistema de segundo orden estudiado, el tl en que se alcanza el 100% del valor asintótico final se puede calcular:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} sen(\omega_d t + artg(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}))$$

El primer corte con 1, se produce en el primer cero del segundo sumando.

Sen(...) = 0 cuando $(\omega_d t + artg(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta})) = l\pi \qquad l = 0, 1, 2, ...$

El primer corte con t>0 es cuando l=1

$$\boxed{t_{l\ 0-100\%} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}}$$

Tiempo de levantamiento tl, tr (10%-90%) - No se dispone de una expresión analítica sencilla. Veamos posibles aproximaciones (tomadas de B.C. Kuo),

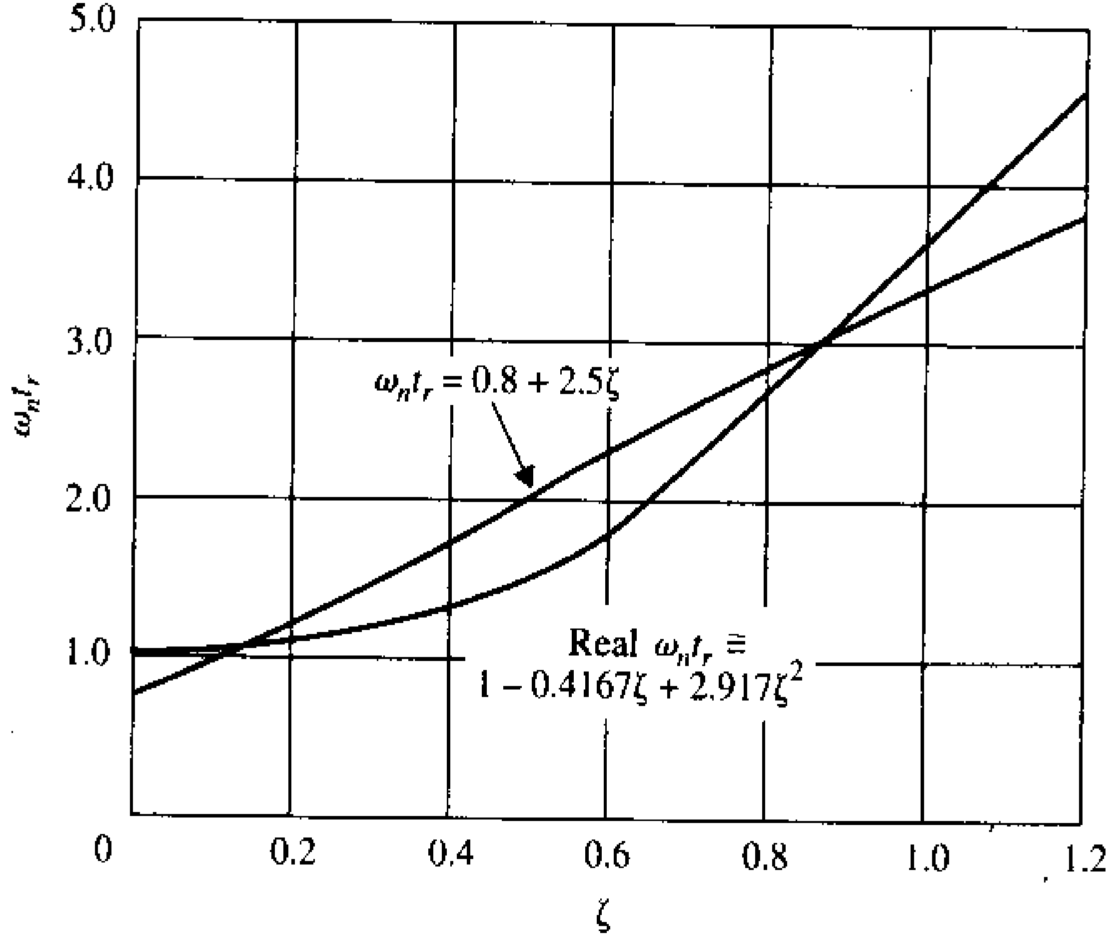


Figura 7-21 Tiempo de levantamiento normalizado contra ζ para el sistema prototipo de segundo orden.

También puede usarse otra aproximación numérica para tl, tr (10%-90%) (M.Hakas, A. Fonseca) :

$$\omega_n t_l = 0.366\ e^{2\zeta} + 0,6536 \qquad si \quad 0<\zeta<1$$

$$\omega_n t_l = 2\ln(9)\zeta - \frac{1,0364}{\zeta} \qquad si \quad \zeta>1$$

Retardo: td Aproximaciones tomadas de B.C. Kuo,

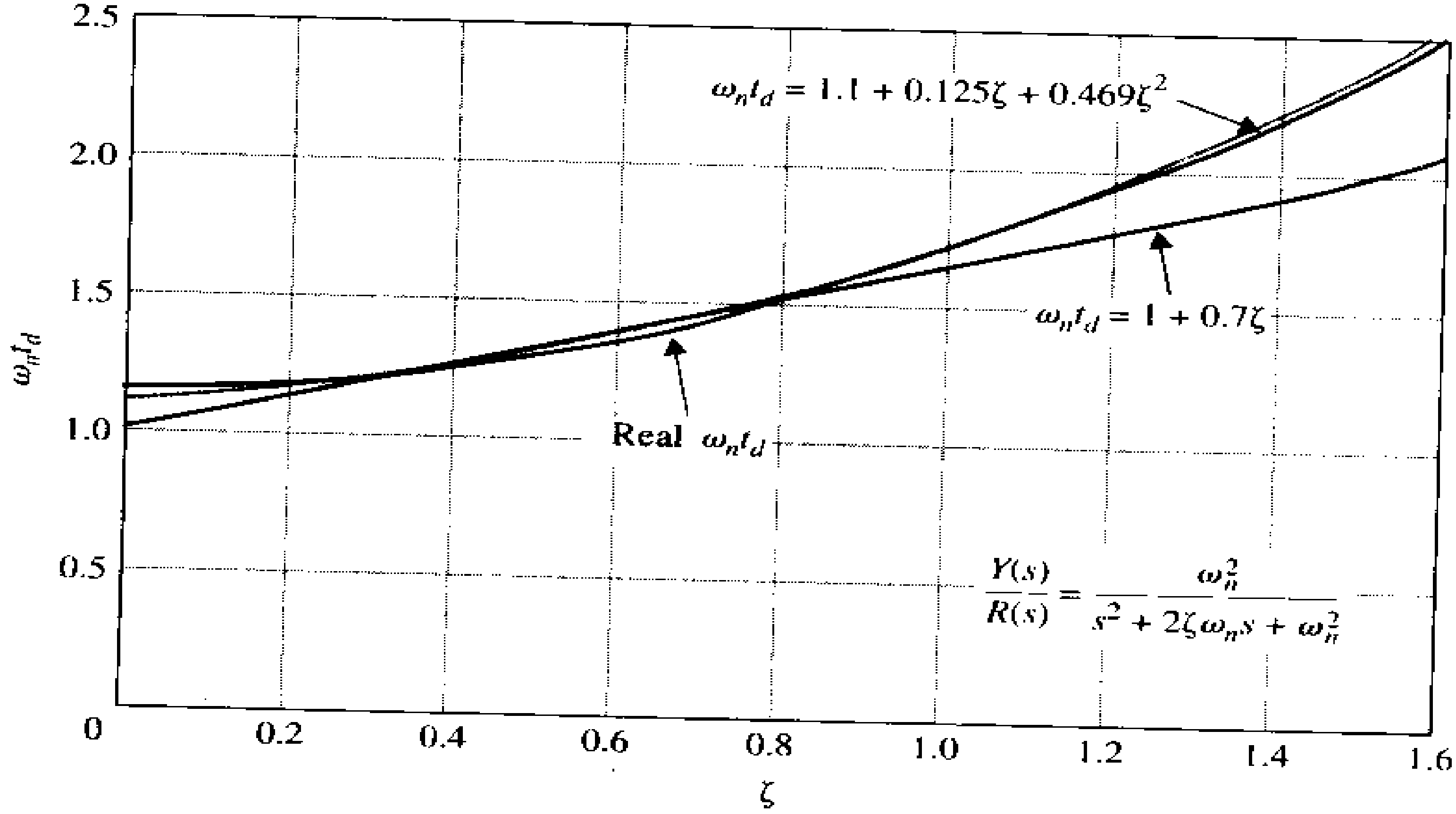


Figura 7-20 Tiempo de retardo normalizado contra ζ para el sistema prototipo de segundo orden.

Las figuras muestran el efecto de desplazar los polos del sistema de orden 2 sobre segmentos de rectas particulares.

a) misma parte real.

b) misma parte imaginaria.

c) misma rel. De amortiguamiento ζ

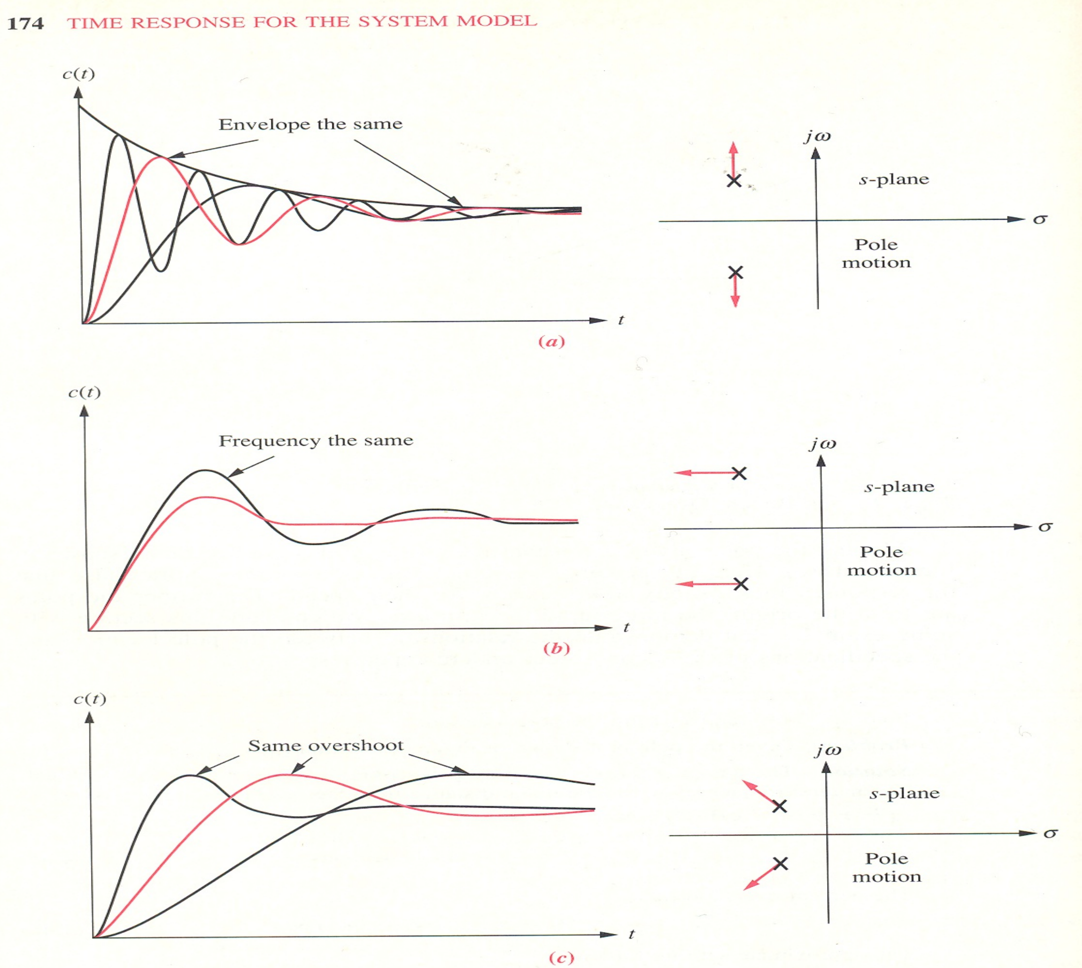


Figure 4.18 Step Responses of Second-Order Underdamped Systems: (*a*) As Poles Move with Constant Real Part; (*b*) As Poles Move with Constant Imaginary Part; (*c*) As Poles Move with Constant Damping Ratio

Respuesta del sistema de orden 2 con un cero

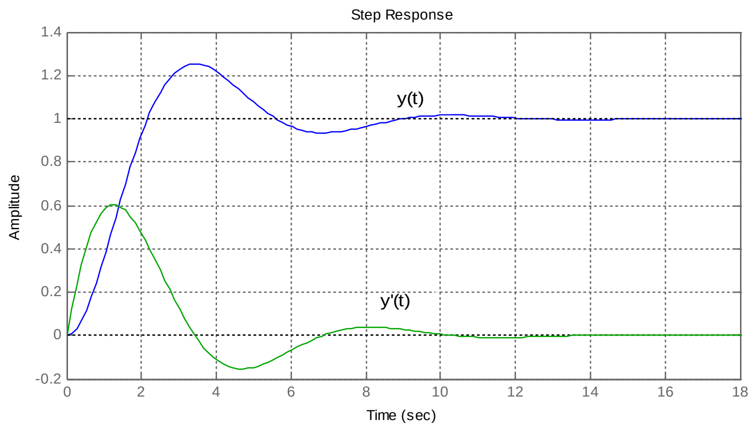
Si H(s) tiene ahora un cero:

$$H(s)=\frac{\omega_n^2(\alpha s+1)}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

La respuesta a escalón es $y(t)+\alpha.y'(t)$ donde $y(t)$ es la respuesta a escalón ya calculada (sistema sin ceros) y $y'(t)$ su derivada (respuesta a impulso).

$$y(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+artg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$y'(t)=\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

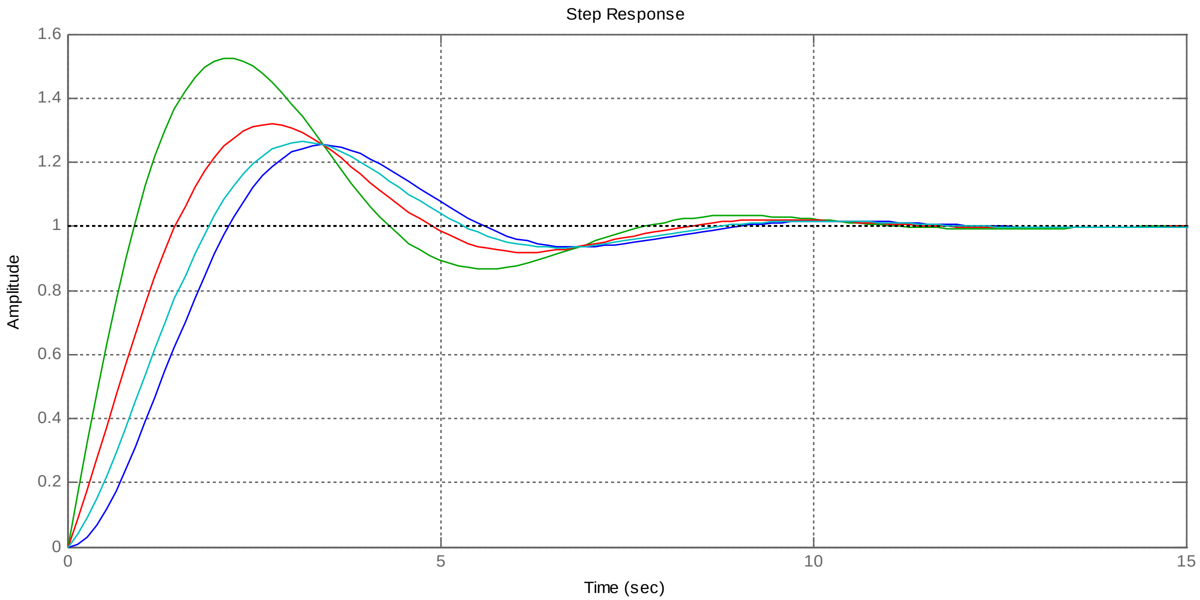


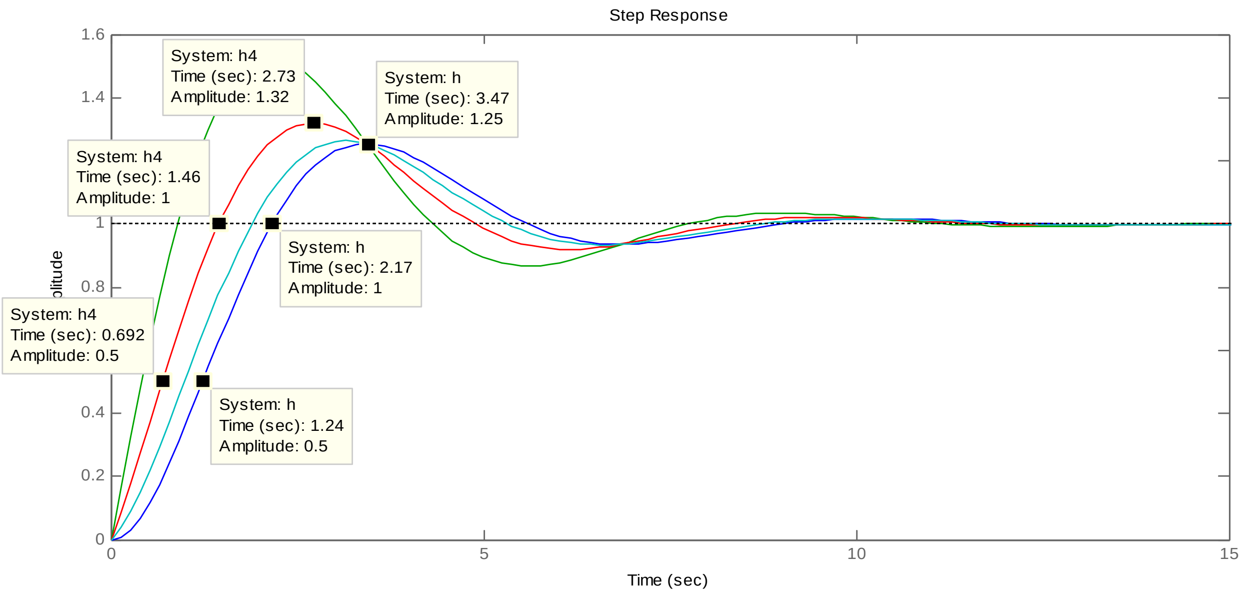
La figura muestra ambas funciones. Obsérvese que:

1) Al ser su derivada, y'(t) es nula en los máximos y mínimos de y(t)

2) El decaimiento exponencial es el mismo, y depende solo de la parte real de los polos.

3) La frecuencia real de las oscilaciones es la misma: $\omega_d=\omega_n\sqrt{\varsigma^2-1}$


Step Response
Amplitude
Time (sec)
0
5
10
15
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6


Step Response
System: h4
Time (sec): 2.73
Amplitude: 1.32
System: h
Time (sec): 3.47
Amplitude: 1.25
System: h4
Time (sec): 1.46
Amplitude: 1
System: h
Time (sec): 2.17
Amplitude: 1
System: h4
Time (sec): 0.692
Amplitude: 0.5
System: h
Time (sec): 1.24
Amplitude: 0.5
Time (sec)