Otras codificaciones

Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

[1]Facultad de Ingeniería Universidad de la República

September 20, 2021

Contenido

1. Otros
   - Ancho de Banda Instantáneo
   - Señales Multicomponente
   - Representación de Gabor
   - Diccionarios
   - Singular Value Decomposition de la Distribución
   - Non–Negative Factorization de la Distribución

Contenido

Ancho de Banda Instantáneo

Habiendo visto que la frecuencia instantánea es:

$$< \omega >_t = \varphi'(t)$$

pero ¿cómo definir el ancho de banda instantáneo?
Propuesta:

$$B_t = \sigma_{\omega|t} = \left| \frac{A'(t)}{A(t)} \right|$$

El ancho de banda global se puede escribir como

$$B^2 = \int \left(\frac{A'(t)}{A(t)} \right)^2 A^2(t)dt + \int (\varphi'(t) - < w >)^2 A^2(t)dt$$

Ancho de Banda Instantáneo

Planteando la dispersión condicional como:

$$\sigma_y^2 = \int \sigma_{y|x}^2 P(x)dx + \int (< y >_x + < y >)^2 P(x)dx$$

similar a la ecuación anterior, se puede sugerir que si el tiempo es x y la frecuencia es y, se asocia:

$$B_t = \sigma_{\omega|t} = \left| \frac{A'(t)}{A(t)} \right|$$

Contenido

Señal Multicomponente

- Frecuencia instantánea tiene sentido cuando la energía se concentra alrededor de un pico.
- Si hay dos picos suficientemente separados, tiene sentido dos frecuencias instantáneas.

Ej:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A_1(t)e^{j\varphi_1(t)} + A_2(t)e^{j\varphi_2(t)}$$

y esto sólo tiene sentido si están suficientemente separadas

$$\left|\frac{A'(t)}{A(t)}\right|, \left|\frac{A'(t)}{A(t)}\right| << |\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)|$$

y en ese caso es posible aislar el análisis y estimar ambos anchos de banda.

Global o Local

Una señal puede ser:

- milticomponente
- multicomponente solo por algunos momentos, monocomponente en otros

Contenido

Gabor

Expansión en funciones tiempo-frecuencia en dos dimensiones

$$t_i = nT, \quad w_i = m\Omega$$

$$s(t) = \sum_{n,m} c_{n,m} h_{n,m}(t), \quad h_{n,m}(t) = h(t - mT)e^{jn\Omega t}\Omega$$

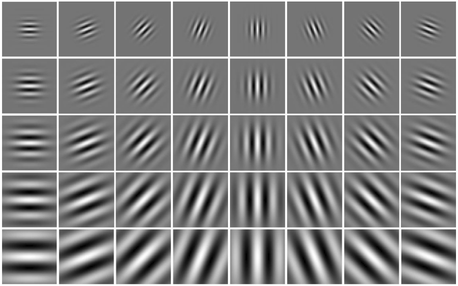
Donde la función sugerida es una gaussiana: compromiso tiempo–frecuencia más compacto.

$$h(t) = (\alpha/\pi)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2}$$

En su versión unidimensional es un espectrograma en que la ventana es una gaussiana.

Gabor 2D

Se utiliza la versión bidimensional para representar oscilaciones en un mapa bidimensional.
Permite representar posición–dirección–frecuencia.
Las componenetes son oscilaciones enventanadas con una gaussiana bidimentional con oscilaciones en diferentes direcciones.
Ejemplo componentes 2D:



Contenido

Sparse Coding

El problema de descomposición clásico:

$$x = D\alpha$$

Objetivo: describir x como una combinación lineal de N formas de onda
(x vector columna de largo K, D_{KxN}).

- si $N = K$ y D^H es la matriz ortonormal de la DFT, entonces α es la transformada de Fourier de x
- si $N \gg K$ y el rango$(D) = K$, es **redundante**, la solución no es única!
- se debe agregar otra restricción

Ej restricción: minimizar el error cuadrático medio $(D\alpha = x)^2$ es una opción.

Sparse Coding

Otra opción es minimzar la cantidad de elementos no nulos de α

$$D\alpha = x$$

Se logra poniendo en el costo el peso de la norma cero de α, que corresponde a una solución esparsa.

- Se puede interpretar como una interpolación local de átomos interpretables como partes o representates de x
- Logra representaciones que corresponden a formas muy eficientes de codificar la solución (muy comprimidas).
- Es robusto al ruido.
- El diccionario D no tiene por qué ser conocido.
- Es un problema no convexo NP–completo

Sparse Coding

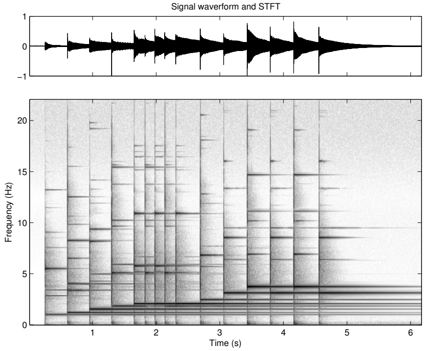
No todas la señales admiten una represetación esparsa con un diccionario dado.
Se puede relajar el problema, si existe una solución esparsa, pidiendo que la norma 1 de x alcanza.
Existen resultados teóricos que muestran que la solución es igual a la esparsa con alta probabilidad (si hay una representación esparsa).

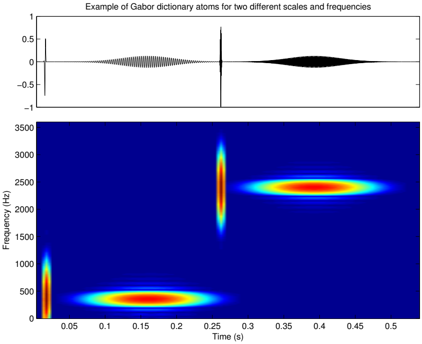
Matching Pursuit:
También es posible hallar una solución buscando uno a uno los términos que minimizan el error cuadrático. Es equivalente a un descenso por el gradiente para hallar soluciones esparsas.

Métodos basados en diccionarios

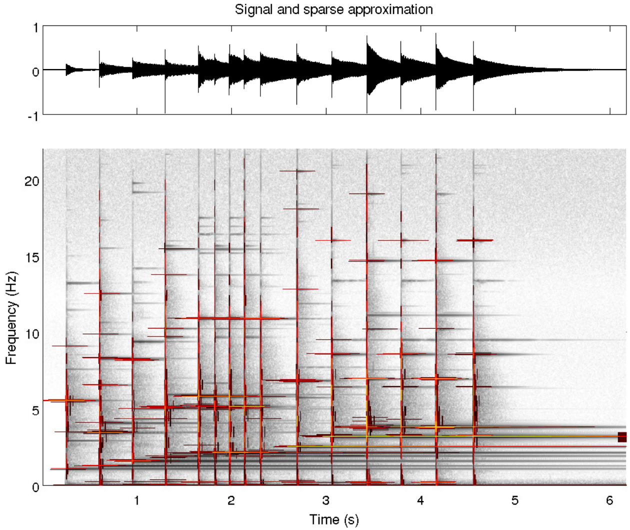
Matching Pursuit

Ejemplo: diccionario compuesto de átomos de Gabor de dos escalas de tiempo diferentes

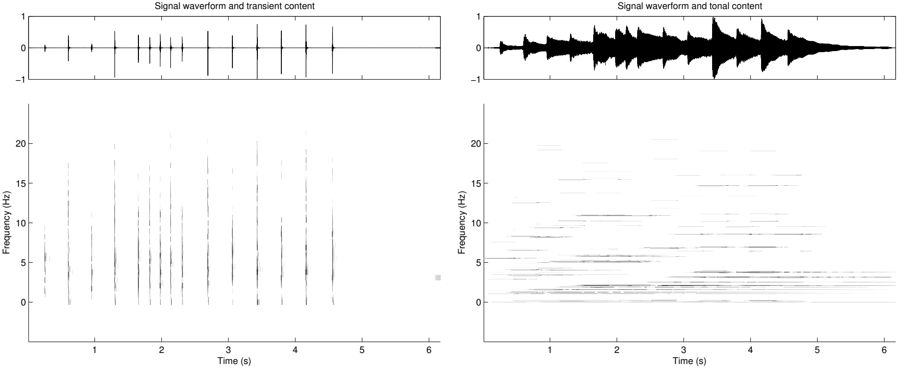




Matching pursuit sobre diccionarios redundantes



Matching pursuit sobre diccionarios redundantes



Contenido

SVD

Teniendo um mapa de dos dimensiones (como una distribución de energía):

$$C(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} u_n(t) v_n^*(\omega)$$

donde $u_n(t)$ y $v_n(\omega)$ se obtienen mediante la solución a un par de expresiones acopladas

$$u_n(t) = \sigma_n \int C(t,\omega) v_n(\omega) d\omega \quad v_n(w) = \sigma_n \int C^*(t,\omega) v_n(t) dt$$

cuya solución se obtiene mediante una descomposición en valores propios.

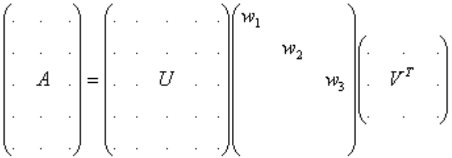
SVD

SVD es un fórma clásica de enontrar las direcciones de máxima varianza de un conjunto de datos. Se puede descomponer una distribución tiempo–frecuencia según su máxima variación.

$$A = U \; \Sigma \; V'$$

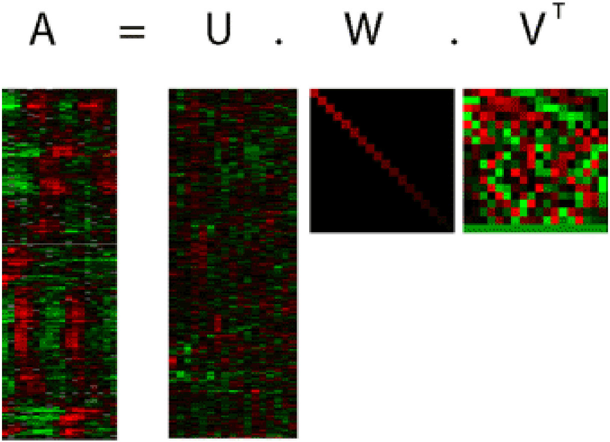
Donde

- V es una matriz con los vectores propios
- Σ es diagonal con los valores propios asociados
- U tiene los coeficientes en términos de los vectores propios



SVD

$$A = U\ \Sigma\ V'$$



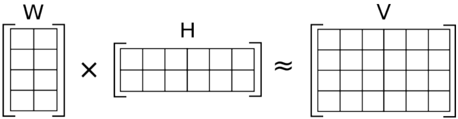
SVD

$$A = U\ \Sigma\ V'$$

- Descartando términos asociados a valores propios pequeños se puede decartar componentes irrelevantes.
- Puede tomar valores negativos! y las distribuciones no!

Contenido

NMF



Se entrena W y H imponiendo que son ambos no–negativos. Genera:

- Elementos que son subpartes de lo que se representa.
- Generalmente queda una representación rala.

Como no es posible obtener valores negativos, es una buena herramienta para trabajar con la Distribución de una señal.