PRÁCTICO 7

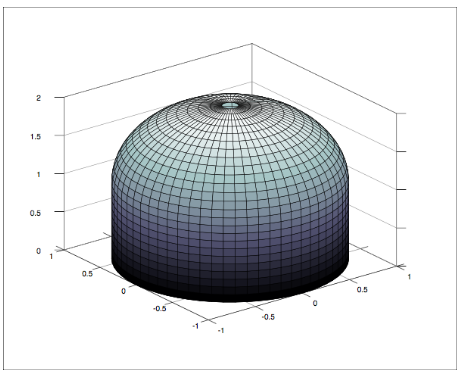
1. Calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde S es la porción de una esfera definida por $x^2+y^2+z^2=1$, con normal exterior y $x+y+z \geq 1$ y $X=(x,y,z)\wedge(1,1,1)$.

2. Calcular $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde S es la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$, $x \geq 0$, con normal exterior y $X=(x^3,-y^3,0)$.

3. Evaluar $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$ donde $X=(y,-x,zx^3y^2)$ y S es la superficie dada por $x^2+y^2+3z^2=1$ con $z \leq 0$, con normal exterior y n, la normal unitaria, apuntando hacia arriba.

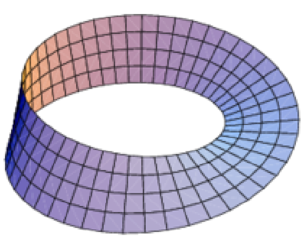
4. Sea $X=(y,-x,zx^3y^2)$. Hallar $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde S es la superficie dada por $x^2+y^2+z^2=1$ con $z \leq 0$ y normal exterior.

5. Comprobar el teorema de Stokes para la semiesfera superior $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z \geq 0$, con normal exterior y el campo vectorial radial $X=(x,y,z)$.

6. 

Sea S la superficie de la figura. S es unión de dos superficies: $S_1=\{(x,y,x) : x^2+y^2=1, z\in[0,1]\}$ y $S_2=\{(x,y,z) : x^2+y^2+(z-1)^2=1, z\geq 1\}$. Sea $X=(zx+z^2x+x, z^3yx+y, z^4x^2)$. Calcular $\iint_S \operatorname{rot} X d\vec{S}$, donde la superficie se ha orientado de modo que la normal en $(0,0,2)$ apunta hacia arriba.

7. Verificar el Teorema de Stokes para el helicoide S dado por $\Phi(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta,\theta)$ con $(r,\theta)\in[0,1]\times[0,\pi/2]$ y el campo $X(x,y,z)=(x,y,z)$.

8. 

Se considera la banda de Möbius (superficie de la figura) que se obtiene tomando una banda plana e identificando ("pegando") sus extremos, habiéndolos orientado con sentidos contrarios. ¿Se verifica el teorema de Stokes en esta superficie? Justifica.

9. Sea $X=(x^2,2xy+x,z)$. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia $x^2+y^2=1$ y S el disco $x^2+y^2\leq 1$, ambos contenidos en el plano $z=0$.

   (a) Determinar el flujo de X hacia el exterior de S (normal hacia arriba)

   (b) Determinar la circulación de X a lo largo de $\mathcal{C}$

   (c) Hallar el flujo de $\operatorname{rot} X$. Verificar directamente el teorema de Stokes en este caso.

10. Un fluido recorre un tubo cilíndrico como se muestra en la figura. Los vectores representados corresponden al campo de velocidades del fluido en cada punto del interior del tubo. La velocidad del fluido disminuye al acercarnos al borde del tubo, mientras que tiene módulo máximo en la linea central (eje del cilindro). Investigar en qué puntos del interior del tubo, el campo de velocidades tiene rotor no nulo y divergencia no nula.

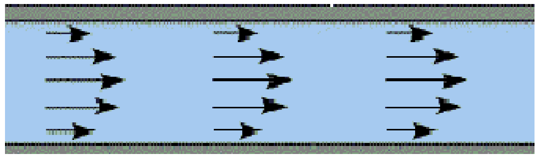


Figura 1: Campo de velocidades

11. Se considera el campo $X : \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definido mediante

$$X(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{k/2}}, \ k \in \mathbb{N}.$$

   a) Representar el campo X.
   b) Mostrar que para $k = 3$ se tiene $\nabla . X = 0$.
   c) Probar que $\nabla . X = 0$ si y solo si $k = 3$.

12. Sea X un campo de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$, tal que su primera componente es idénticamente nula, y su segunda componente $B(x,y,z)$ verifica $B(0,y,0) = 3y^2, \ B(1,y,0) = 8y^3$.

   Hallar el flujo del rotor de X a través de la superficie con borde, parametrizada por:

$$\begin{cases} x &= u & 0 \leq u \leq 1 \\ y &= v & 0 \leq v \leq 1 \\ z &= uv(1-u)(1-v) & \end{cases}$$

   orientada con la normal con tercera componente positiva.

   De aquí en más a menos que se indique lo contrario, las superficies cerradas y acotadas están orientadas con la normal exterior.

13. Determinar si $X = (x,y,z)$ tiene un potencial vector. En caso afirmativo, hallarlo.

14. Determinar si $X = (x^2+1, z-2xy, y)$ tiene un potencial vector. En caso afirmativo, hallarlo.

15. Para los siguientes campos comprobar que $\operatorname{div} X = 0$ y hallar un potencial vector de X.

   (a) $X = (xz, -yz, y)$.
   (b) $X = (y^2, z^2, x^2)$.
   (c) $X = (xe^y, -x\cos z, -ze^y)$.
   (d) $X = (x\cos y, -\sin y, \sin x)$.

16. Calcular, primero directamente, y luego usando el teorema de Gauss en el espacio, la integral

$$\int\!\!\int_S (y-z, x+2y+, x-z)\, dS$$

   sobre la superficie del cubo de centro en el origen, de lados de longitud 2, paralelos a los ejes coordenados, y orientado con la normal exterior.

17. Sea $X = (y, z, xz)$. Calcular $\iint_{\partial W} X d\vec{S}$ en cada una de las siguientes regiones W.

   (a) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

(b) $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ con $x \geq 0$.

18. Hallar el flujo del campo $X = (x - y^2, y, x^3)$ hacia el exterior del paralelepípedo $[0,1] \times [1,2] \times [1,4]$.

19. Calcular $\iint_{\partial W} X.d\vec{S}$ donde $X = (1, 1, z(x^2+y^2)^2)$ y W es el cilindro macizo $x^2+y^2 \leq 1$ con $z \in [0,1]$.