Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2016**

Examen – Jueves 13 de julio de 2017

Número de examen	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje mínimo para aprobar es 50 puntos.
- La duración del examen es tres horas.

Notación: En el parcial se usa la siguiente notación:

- $\mathcal{P}_n$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n.

(I) Verdadero Falso. Total: 20 puntos

Puntajes: 2 puntos si la respuesta es correcta, -2 puntos si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej 4	Ej 5	Ej 6	Ej 7	Ej 8	Ej 9	Ej 10
F	**F**	**F**	**V**	**F**	**F**	**F**	**V**	**V**	**F**

Ejercicio 1: Si $\{u, v, w\}$ es un generador de un espacio vectorial V, entonces $\{u+v-w, u-v\}$ es un conjunto LI.

Ejercicio 2:
Si A es una matriz 3×3 tal que $A^2 = 2A$, entonces los únicos valores posibles de $det(A)$ son 0 y 2.

Ejercicio 3:
Si A, B y C son tres matrices cuadradas tales que $det(AC) = det(BC)$ y C es invertible, entonces A y B son matrices semejantes.

Ejercicio 4:
Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset V$ es un conjunto de vectores LI, con $m < n$, entonces se pueden agregar vectores al conjunto B hasta obtener una base de V.

Ejercicio 5:
Si $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{P}_4$ es una transformación lineal tal que $N(T) = \{0\}$ entonces T es sobreyectiva.

Ejercicio 6:
La recta $r) \begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases}$ es ortogonal al plano $\pi) \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + \lambda + 2\mu \\ z = -3\lambda \end{cases}$

Ejercicio 7:
Existen matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tales que A no es invertible, B no es invertible, pero AB sí es invertible.

Ejercicio 8:
La transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $T(x, y, z, t) = (t + z\ ,\ t - z\ ,0\ ,\ 0)$, con $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, cumple $N(T) = Im(T)$.

Ejercicio 9:
Existen sistemas lineales de m ecuaciones con n incógnitas, con $m > n$, que son compatibles determinados.

Ejercicio 10:
El producto vectorial en $\mathbb{R}^3$ es asociativo. Esto es: $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$, para cualquier terna de vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

(II) Desarrollo. Total: 80 puntos

Ejercicio 1: (20 puntos)

Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} \alpha & 3 & 1 \\ \alpha & 4 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

a) Discuta el rango de A según el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: Escalerizando resulta que A es semejante a, por ejemplo, la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 - \alpha^2 \end{pmatrix}.$$

De manera que si $\alpha = 2$ ó $\alpha = -2$ resulta $rango(A) = 2$. En caso contrario $rango(A) = 3$.

b) Para $\alpha = 1$ la inversa de A es:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 2: (20 puntos)

Considere los siguientes subconjuntos del espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales:

$$V_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : traza(A) = 0\}.$$

$$V_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right].$$

a) Pruebe que V_1 es un subespacio vectorial y calcule su dimensión.

Solución: En primer lugar, la matriz nula está en V_1, así que $V_1 \neq \emptyset$.
Dados $A, B \in V_1$, se cumple que $traza(A) = 0$ y $traza(B) = 0$. Luego $traza(A+B) = traza(A)+traza(B) = 0$ y por lo tanto $A + B \in V_1$.

Por otro lado, si $A \in V_1$ ($traza(A) = 0$) y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces $traza(\lambda A) = \lambda traza(A) = \lambda 0 = 0$ lo que implica que $\lambda A \in V_1$.
En conclusión, V_1 es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

La forma genérica de los elementos de V_1 es $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, de donde se deduce que el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es base de V_1 y por lo tanto $dim(V_1) = 3$.

b) Halle una base de V_2 y deduzca su dimensión.

Solución: El conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ es generador de V_2, por definición, pero no es linealmente independiente. Al quitar la última matriz, que es combinación lineal de las restantes, se obtiene el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ que es linealmente independiente y genera V_2, y por lo tanto es una base. Se deduce entonces que $dim(V_2) = 2$.

c) Halle la dimensión de $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

Solución: Se sabe que un generador de $V_1 + V_2$ es la unión de las bases de V_1 y V_2, o sea $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Estudiando el espacio generado por dicho conjunto se llega a que $V_1 + V_2 = \mathcal{M}_{2\times 2}$ y por lo tanto $dim(V_1 + V_2) = 4$.

Para hallar $dim(V_1 \cap V_2)$ se puede utilizar la fórmula

$$dim(V_1 + V_2) = dim(V_1) + dim(V_2) - dim(V_1 \cap V_2),$$

de donde resulta $dim(V_1 \cap V_2) = 1$.

Ejercicio 3: (20 puntos)

Considere la función $S : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ que cumple:

- $S(x^2 + 2x + 1) = (-1, 4, 3)$.
- $S(x^2 - 1) = (-1, 2, 5)$.
- $S(3x) = (3, 0, -3)$.

a) Pruebe que existe una única transformación lineal que verifica las condiciones dadas.

Solución:
Como el conjunto $\{x^2 + 2x + 1, x^2 - 1, 3x\}$ es una base de $\mathcal{P}_2$ se deduce que existe una única transformación lineal que verifica las condiciones dadas.

b) Halle la matriz asociada a dicha transformación en las bases canónicas respectivas.

Solución: Para esto se deben calcular $S(x^2), S(x)$ y $S(1)$:

$$S(x) = \frac{1}{3} S(3x) = (1, 0, -1).$$

$$S(x^2) = \frac{1}{2} \left[S(x^2 + 2x + 1) + S(x^2 - 1) - 2S(x) \right] = (-2, 3, 5).$$

$$S(1) = -S(x^2 - 1) + S(x^2) = (-1, 1, 0).$$

Luego, la matriz asociada en las bases canónicas es:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(En caso de que la base de polinomios se ordene de otra manera las columnas de la matriz asociada cambian su orden de manera correspondiente.)

c) Halle $N(T)$ e $Im(T)$.

Solución: Como el conjunto $\{(-2,3,5),(1,0,-1),(-1,1,0)\}$ es generador de $Im(T)$ y generador de $\mathbb{R}^3$ se obtiene que $Im(T)=\mathbb{R}^3$ y, utilizando el teorema de las dimensiones, $N(T)=\{0\}$.

Ejercicio 4: (20 puntos)

Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo con $dim(V)=n$. Considere $T:V\to W$ una transformación lineal. Se denota $d=dim(N(T))$ y se asume que $0<d<n$.

a) Pruebe que si $\{e_1,e_2,\dots,e_d\}$ es una base de $N(T)$ y $\{e_1,e_2,\dots,e_d,e_{d+1},\dots,e_n\}$ es una base de V, entonces $\{T(e_{d+1}),\dots,T(e_n)\}$ es una base de $Im(T)$.

b) Concluya en este caso que $dim(V)=dim(N(T))+dim(Im(T))$.

Solución: Ver Teórico (Teorema de las dimensiones).