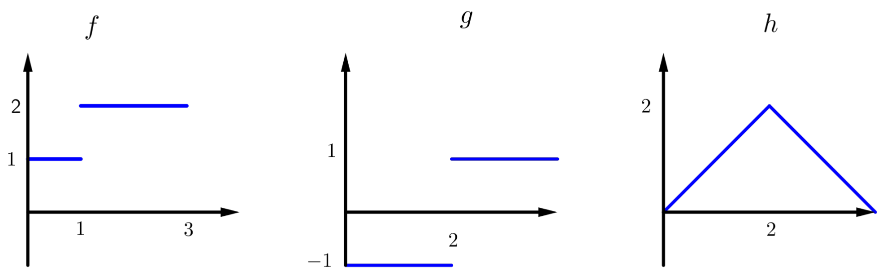
Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer semestre 2017**

Práctico 8 - Integrales

1. Integrales geométricas

En esta sección se trabajará con la idea intuitiva de integrales, donde la integral de una función f en el intervalo $[a,b]$ es el área signada entre el gráfico y el eje x

Algunos ejemplos de integrales



- $\int_0^3 f(t)dt = 1\times 1 + 2\times 2 = 5$
- $\int_0^2 g(t)dt = -1\times 2 = -2, \quad \int_0^4 g(t)dt = 0$
- $\int_0^4 h(t)dt = \frac{2\times 2}{2} = 2$

Todos los resultados de esta sección se podrán probar formalmente luego, aquí están para dar ideas intuitivas del problema y trabajar con acotaciones.

Se recuerdan las propiedades de área.

Propiedades básicas de áreas

- Si $A \subset B$ entonces $Area(A) \leq Area(B)$
- El área de un rectángulo R de lados a y b es $Area(R) = ab$
- Si $A \cap B = \emptyset$ entonces $Area(A\cup B) = Area(A) + Area(B)$. Además, si dos rectángulos R_1 y R_2 se intersectan sólo en lados $Area(R_1 \cup R_2) = Area(R_1) + Area(R_2)$

Se puede asumir que todas las funciones de esta sección son integrables. Posteriormente podrán probar que lo son.

1. Calcular la integral de las siguientes funciones en $[0,2]$.

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x-2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ (b) $f(x) = x + [x]$ (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{[\frac{1}{x}]} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \left(x - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)2^{n+1} & \text{si } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 1 - \left(x - \left(\left(\frac{1}{2}^n\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)\right)2^{n+1} & \text{si } \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{cases}$

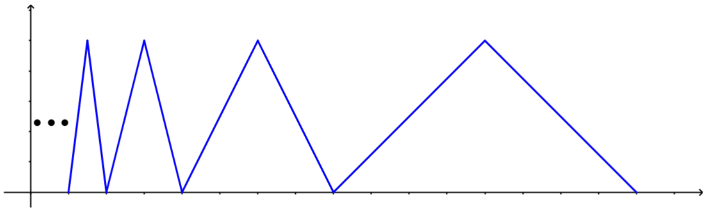


Figura 1: bosquejo del ejemplo 1.d

2. *a*) Calcular las integrales

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2\pi} \sin(kt) + 5\,dt\,, \quad k \in \mathbb{N} \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{2\pi} \cos(kt) + 5\,dt\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

   b) Determinar el signo de las siguientes integrales

$$\text{(a)} \quad \int_0^{2} \sin(x^2\pi)dx \qquad \text{(b)} \quad \int_{-1}^{1} \cos(x^2\pi)dx$$

3. ¿Qué valores de a y b, $a < b$, maximizan el valor de $\int_a^b x - x^2 dx$?

4. Sabiendo que $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, demostrar que:

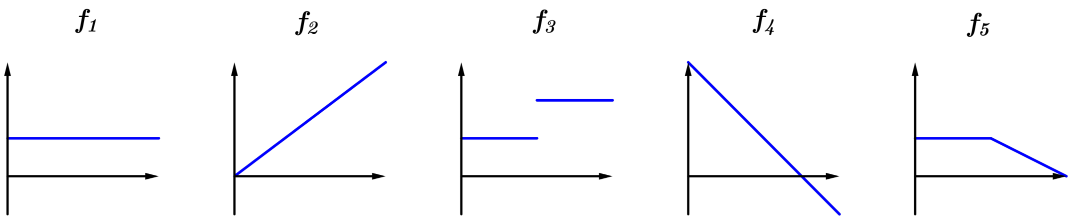
   a) Si f es par, entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

   b) Si f es impar, entonces $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

5. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \le \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx \le \frac{1}{2}$$

6. Bosquejar las funciones $F_i(x) = \int_0^x f_i(t)dt$, para las siguientes funciones.



   Conjeturar sobre si las funciones F_i son derivables

7. Cálculo de algunas integrales trigonométricas

   a) Calcular la integral $\int_0^{2\pi} \sin(x) + k\,dx$.

   b) Deducir la integrales

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,dx \quad \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

2) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)|\,dx$

c) Probar que para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se verifica la desigualdad $\int_0^x \sin(t)\,dt \geq \sin(x)$

8. Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{2\pi}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \frac{1}{2} & \text{si } \frac{3\pi}{4} \leq x < \frac{5\pi}{6} \\ 0 & \text{si } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Graficar las funciones $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ y $h(x) = \int_0^x g(t)dt$

2. Sumas de Riemann

1. Calcular $\int_1^3 x^2\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas. Recordar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Calcular $\int_a^b e^x\,dx$ hallando sus sumas superiores e inferiores para particiones equiespaciadas. Recordar que $\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r}$.

3. Probar que si f es una función integrable, entonces la función $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.

4. Acotar el área del círculo de radio 1 con un error menor al 0,1 %

5. Probar que una función monótona creciente y acotada es integrable. Sugerencia: Para probar que es integrable en el intervalo $[a, b]$, tomar una partición equispaciadas de tamaño $\frac{b-a}{n}$

6. Suponga que f es una función continua y que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$.

   a) Asumiendo que existe el límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ probar que $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene que

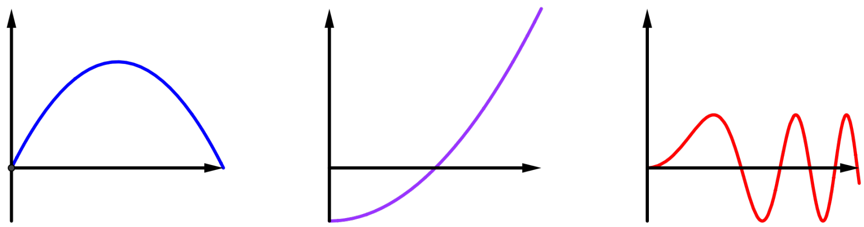
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt$$

   b) Probar que el limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ existe y ademas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = a$$

3. Teorema de Valor Medio, Teorema Fundamental y Regla de Barrow

1. Para las siguientes funciones, bosquejar las funciones $F(x) = \int_0^x f(t)dt$



2. Demostrar que
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)dx$$
Sugerencia: toda partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ de $[a,b]$ da origen a una partición $P' = \{t_0 + c, \ldots, t_n + c\}$ de $[a+c, b+c]$ y viceversa.

3. Probar que si f es continua y no negativa en $[a,b]$, entonces
$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall\, x \in [a,b]$$

4. Dar un ejemplo de función integrable f tal que$\forall c \in [a,b]$ se cumple que $\int_a^b f(x)\,dx \neq (b-a)f(c)$

5. Utilizar el Teorema del Valor Medio para probar que
$$\lim_{x\to 1} \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\log(t)} - \frac{1}{t\log(t)}\right) dt = 0$$

6. Sea f continua en $[2,8]$, tal que $\int_2^8 f(x)\,dx = 20$ y $\int_8^4 f(x)\,dx = 12$.

   a) Calcular $\int_2^4 f(x)\,dx$

   b) Probar que existe $c \in [2,4]$ tal que $f(c) = 16$.

7. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$ (b) $f_2(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$ (c) $f_3(x) = \int_x^3 \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

(d) $f_4(x) = \int_{\cos(x)}^{3} \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$ (e) $f_5(x) = \int_{\cos(x)}^{\log(x)} \sqrt{t^2 - t + 1}\,dt$

8. Determinar (si existe) una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un número real $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$\text{(a)} \quad \int\limits_c^x f(t)\,dt = 2 + x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{(b)} \quad \int_1^x f(t)dt = \log(x^2 + 2x + 2) - c$$

$$\text{(c)} \quad \int_c^x f(t)dt = (x-1)^4 \qquad \text{(d)} \quad \int_0^x f(t)dt = c - e^{-x^2}$$

9. Sea $F(x) = \int_0^x f$. En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de x se verifica que $F'(x) = f(x)$.

$$i)\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases} \qquad ii) f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \le 0 \\ x \text{ si } x \ge 0 \end{cases} \qquad iii)\, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

10. Sea f una función continua, monótona estricta en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

   a) Probar que

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt + \int\limits_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \;\; \forall x \in [a,b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int\limits_1^2 \sqrt{t}\,dt$ y $\int\limits_1^2 \log(t)\,dt$, utilizando el resultado de la parte anterior.

11. *a*) Demostrar que si f es integrable en $[a,b]$ y $m \le f(x) \le M$, $\forall x \in [a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu$$

   para un cierto $\mu \in [m, M]$.

   b) Demostrar que si f es continua en $[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi)$ para un cierto $\xi \in [a,b]$. Este resultado se conoce como el Teorema del Valor Medio para integrales. Ver con un ejemplo que la continuidad es esencial.

   c) De un modo más general, si f es continua en $[a,b]$, g y fg son integrables, y g es no negativa en $[a,b]$, demostrar que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$ para un cierto $\xi \in [a,b]$. Este resultado se conoce como Segundo Teorema del Valor Medio para integrales.

   d) Deducir el mismo resultado si g es no positiva (en vez de no negativa) en $[a,b]$, y observar que la hipótesis de que g no cambia de signo en $[a,b]$ es esencial.

12. Consideremos la función $y = F(x)$ definida por la fórmula

$$F(x) = \int\limits_0^x e^{\log(3) - s^2}\,ds.$$

Sea $g = F^{-1}$. Calcular la derivada de g en $y = 0$.
Observación: La integral que aparece en este ejercicio no admite una expresión elemental, por lo que no es posible hallar una fórmula para g.

13. Sea $G:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que $G(x)=\int\limits_{x}^{x+1} e^{-t^2}\,dt$

   a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.
   b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.

14. Indicar si es verdadero o falso que:
   Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función continua y F una primitiva de f tal que $F(0)=4$ necesariamente
$$\int_0^x F(t)f(t)dt=\frac{(F(x))^2}{2}-8$$

15. Utilizando los resultados del ejercicio 9 del práctico 5 sección Derivación, calcular:
$$\text{(a)}\quad \int_a^b \sin^2(t)dt \qquad \text{(b)}\quad \int_a^b \log(t)\,dt\ \ a,b\in\mathbb{R}^+$$
$$\text{(c)}\quad \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx \qquad \text{(d)}\quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ a,b\in[-1,1] \qquad \text{(e)}\quad \int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ \ a,b\in[-1,1]$$

16. Calcular la derivada de las siguientes funciones
$$\text{(a)}\quad F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{3+\sin(t)}\,dt \qquad \text{(b)}\quad G(x)=\int_0^{x^2}\frac{1+\sqrt{t}}{2+t}\,dt \qquad \text{(c)}\quad H(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{t^7}{1+t^4}\,dt$$

17. *a*) Demuestre que los valores de las siguientes expresiones no dependen del valor de x
$$\text{(a)}\quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{1+t^2}\,dt \qquad \text{(b)}\quad \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\ ,\ \ x\in(0,\frac{\pi}{2})$$
   b) Calcule $(f^{-1})'(0)$ para
$$\text{(a)}\quad f(x)=\int_0^x 1+\sin(\sin(t))\,dt \qquad \text{(b)}\quad f(x)=\int_1^x \cos(\cos(t))\,dt$$
   c) Halle una función g tal que
$$\text{(a)}\quad \int_0^x g(t)t\,dt=x+x^2 \qquad \text{(b)}\quad \int_0^{x^2} g(t)t\,dt=x+x^2$$

18. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función positiva y derivable, probar que

   a) $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt=\log(f(b))-\log(f(a))$
   b) $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}dt=\sqrt{f(b)}-\sqrt{f(a)}$
   c) $\int_a^b 2f'(t)f(t)dt=f^2(b)-f^2(b)$
   d) Calcular las siguientes integrales
$$\text{(a)}\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan(t)\,dt \qquad \text{(b)}\quad \int_a^b \frac{x^{2n-1}}{x^{2n}+1}\,dx \qquad \text{(c)}\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(t)}{\sqrt{\cos(t)}}\,dt \qquad \text{(d)}\quad \int_a^b \frac{x^{2n-1}}{\sqrt{x^{2n}+1}}$$
$$\text{(e)}\quad \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx \qquad \text{(f)}\quad \int_a^b \cos(x)\sin(x)\,dx \qquad \text{(g)}\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sec^2(x)}{a+b\tan(x)}\,dx$$

19. *a*) Hallar la primitiva F de la función

$$f(x) = \operatorname{tg}(x)\log(\cos(x)), \text{ para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

que verifica $F(0) = 0$.

b) Calcular el primer término no nulo en el desarrollo de Taylor de F alrededor de 0.

c) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^4}$$

20. Calcular:

$$\text{(a)} \int \frac{1}{3x-1}\,dx \quad \text{(b)} \int \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{(c)} \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx \quad \text{(d)} \int \sqrt{e^x}\,dx$$

$$\text{(e)} \int \operatorname{arc\,tg} x\,dx \quad \text{(f)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \quad \text{(g)} \int \frac{1}{x\sqrt{4+x^2}}\,dx \quad \text{(h)} \int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$$

$$\text{(i)} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{(j)} \int \frac{1}{\cos x}\,dx \quad \text{(k)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \quad \text{(l)} \int_1^e \frac{1}{x}\operatorname{sen}^3(1+\log x)\,dx$$

21. Sea $A(t)$ el área de la región del plano comprendida entre la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 1$, la recta horizontal $y = 1$ y la recta vertical $x = t$, con $t \in [0, \frac{1}{2}]$

a) Expresar $A(t)$ (no calcularla).

b) Calcular los valores máximo y mínimo absolutos de $A(t)$ en el intervalo $[0, \frac{1}{2}]$.

22. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

a) Calcular el polinomio de Taylor en 0 de orden 4.

b) Determinar $F(0{,}5)$ con un error menor a 10^{-5}.

4. Métodos de integración

1. Integrar usando el método de sustitución:

$$\text{(a)} \int (2x+3)^7\,dx \quad \text{(b)} \int \frac{x}{\sqrt{1+8x^2}}\,dx \quad \text{(c)} \int \operatorname{sen} x \cos^3 x\,dx \quad \text{(d)} \int \frac{\log x}{x}\,dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{x}{1+9x^2}\,dx \quad \text{(f)} \int \frac{1}{e^{5x}}\,dx \quad \text{(g)} \int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx \quad \text{(h)} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx$$

$$\text{(i)} \int x^2\sqrt{x+3}\,dx \quad \text{(j)} \int x^{n-1}\sin(x^n)\,dx \quad \text{(k)} \int xe^{x^2}\,dx$$

2. Calcular las siguientes integrales aplicando el cambio de variable que se indica

$$\text{(a)} \int_2^5 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}\,dx \quad x = t^2+1 \qquad ;\text{(b)} \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,dx \quad x = 4\sin^2(t) - 2$$

3. Sea $f : [0, 8] \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua, y tal que $f(0) = f(2) = 0$. Determinar si son verdaderas las siguientes igualdades:

$$\text{(1)} \int_0^8 f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x^3)x^2\,dx \quad \text{(2)} \int_0^2 e^x f'(x)\,dx = -\int_0^2 e^x f(x)\,dx$$

4. Si se aplica la sustitución $x = \sin(t)$ a la integral $\int_0^\pi t^3 \cos(t)\,dt = \int_0^0 (\arcsin(x))^3\,dx = 0$ ¿ ¿Por qué es equivocado este razonamiento?

5. Calcular integrando por partes:

$$\text{(a)} \int x \operatorname{sen} x\,dx \qquad \text{(b)} \int x2^{-x}\,dx \qquad \text{(c)} \int x^2 e^x\,dx \qquad \text{(d)} \int x \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$\text{(e)} \int x^2 \log x\,dx \qquad \text{(f)} \int \log x\,dx \qquad \text{(g)} \int \operatorname{sen}^2 x\,dx \qquad \text{(h)} \int \cos x \operatorname{sen} x\,dx$$

$$\text{(i)} \int e^{\alpha x} \cos(\beta x)\,dx \qquad \text{(j)} \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx \qquad \text{(k)} \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx \qquad \text{(l)} \int \log^2(x)\,dx$$

6. Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

$$\text{(a)} \int \frac{x-1}{x^2-x-2}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx \qquad \text{(f)} \int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2}\,dx \qquad \text{(g)} \int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)}$$

$$\text{(h)} \int \frac{x^2+x}{x^2-1}\,dx \qquad \text{(i)} \int \frac{x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx$$

5. Cálculo de integrales

1. Sea f continua. Demostrar que $\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,dx$. Calcular $\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

2. Calcular las integrales

$$\text{(a)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad \text{(b)} \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx \qquad \text{(c)} \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(d)} \int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$$

$$\text{(e)} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad \text{(f)} \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx$$

3. *a*) Probar que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$. Calcular $\int_0^1 x^2(1-x)^{30}\,dx$.

   b) Sea f una función continua. Probar que $\int_0^\pi x f(\sin(x))\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\,dx$, y calcular $\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

   c) Demostrar que $\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$

4. Calcular las siguientes integrales

$$\text{(a)} \int_1^e \frac{1}{x}\sin^3(1+\log(x))dx \qquad \text{(b)} \int_2^4 \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)}$$

5. *a*) Sea $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ $n \in \mathbb{N}$. Integrando por partes deducir la fórmula de recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

b) Calcular

$$\text{(c)} \quad \int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx \qquad \text{(d)} \quad \int \frac{2x+3}{(x^2+9)^2} \qquad \text{(e)} \quad \int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$$

6. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$\text{(a)} \quad \int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int \operatorname{tg}^3(2x+1)\sec^2(2x+1)\,dx$$

Recordar que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

6. Integrales Impropias

1. Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(t) \geq 0$ y definimos $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Demostrar que $F(x)$ es creciente, y que

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge } \Longleftrightarrow F(x) \text{ esta acotada superiormente}$$

2. Sean f y g funciones continuas y tales que $0 \leq f(t) \leq g(t)$. Demostrar que

$$\int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ diverge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ diverge}$$

7. Modelos

1. Hallar el área encerrada entre los gráficos de las siguientes funciones

   a) $f(x) = e^{x-1} - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0,2]$

   b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en el intervalo $[2,4]$

   c) $f(x) = 0$ y $g(x) = x^2 + x - 2$ en el intervalo $[1,2]$

2. Calcular el área del círculo de radio r. Calcular el área de la elipse de ejes de medida $2a$ y $2b$

3. Un móvil se desplaza por un camino recto y su aceleración en el instante t esta dada por $a(t) = t(t-100)$. En el instante inicial el móvil estaba en la posición s_0 y su velocidad inicial era 2m/s. ¿ Cual es la posición $s(t)$ para $0 < t < 100$?

4. El volumen de un cuerpo de revolución se puede calcular usando la fórmula

$$V = \int_a^b \pi r(x)^2 dx$$

   donde $r(x)$ es el radio del círculo obtenido al girar la figura alrededor del eje de revolución. Usando esta fórmula calcular los siguientes volúmenes:

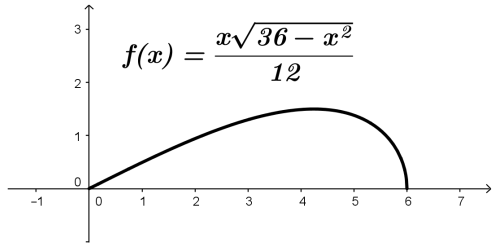
   a) volumen de la esfera de radio R;

   b) volumen del cono recto de base circular de radio R y altura h;

c) volumen de la copa (o paraboloide elíptico): $x^2 + y^2 = z \leq 1$ (en la intersección con el plano $x = 0$ se tiene parábola $z = y^2$).

5. Diseño de una aplomada.

   Se le ha pedido a un ingeniero que diseñe una aplomada que pese alrededor de 190g. Para cumplir su cometido decide que su forma debe ser similiar al sólido de revolución generado por la funcion f de la figura. Determine el volumen de la aplomada. Si para su fabricación elige un latón que tiene densidad de $8{,}5 g/cm^3$, ¿cuánto pesará la aplomada?



6. (*Segundo parcial primer semestre 2014*)
   Tenemos un cono de altura h y radio en la base r.

   a) Sabemos (no se pide demostrar) que el área de revolución engendrada por el giro de la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox es:

   $$A = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

   Calcular el área de la superficie del cono de revolución (sin base) de altura h y radio de la base igual a r.

   b) Deducir la fórmula del volumen del cuerpo de revolución que resulta de girar la curva $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, alrededor del eje Ox.

   c) Calcular el volumen del cono de revolución de altura h y radio de la base igual a r.

   d) Una marca famosa de helados está lanzando un nuevo cono helado. El cono debe llevar 50π cm^3 de helado (y no puede sobresalir del cono). El material que se usa para hacer el envoltorio es costoso, por tanto se quiere que el cono tenga la menor superficie posible. Calcular h y r del nuevo cono helado.

7. Recordemos que la longitud de arco de una curva $f(x)$ para $a \leq x \leq b$ está dada por la fórmula

   $$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx.$$

   a) Calcular la integral indefinida

   $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$$

   usando la sustitución $y = x + \sqrt{1 + x^2}$.

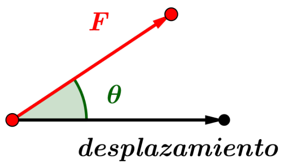
   b) Probar que la longitud del arco de la parábola $f(x) = ax^2$ para un $a \in \mathbb{R}$ y el intervalo $[0, b]$ es igual a

   $$\frac{b}{2}\sqrt{1 + 4a^2b^2} + \frac{1}{4a}ln|2ab + \sqrt{1 + 4a^2b^2}|.$$

   Sugerencia: usar integración por partes, luego sumar y restar 1 en el lugar apropiado de la integral obtenida y terminar aplicando la parte *a*).

8. Explicar por qué 'el recorrido es la integral de la velocidad'. Sugerencia: Recordar que la afirmación es válida si la velocidad es constante.

9. El trabajo W invertido sobre un sistema por un agente que ejerce una fuerza constante sobre el sistema es el producto de la magnitud F de la fuerza, la magnitud Δr de desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza y $\cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre los vectores fuerza y desplazamiento es $W = F\Delta r\cos(\theta)$



En el caso en que la fuerza sea variable en dirección y sentido pero la dirección del desplazamiento no, digamos que va desde a hasta b , entonces el trabajo es $W = \int_a^b F(x)\cos(\theta(x))dx$.

Conjeturar sobre el por qué de esta definición, apartir de la definición para fuerza constante.

   a) Una partícula se desplaza sobre una dirección desde $x = 0m$ hasta $x = 4m$. Esta partícula se encuentra sometida a una única fuerza F_x dada por $F(x) = \begin{cases} 1{,}5x & \text{si } x \leq 2 \\ 6-(1{,}5)(2-x) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

   Calcular el trabajo realizado por F_x

   b) Una pelota de $0{,}37kg$ de masa se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de $14m/s$, y alcanza su altura máxima a $8{,}4m$ del punto de lanzamiento.

      1) Halle el trabajo realizado por la fuerza de fricción del aire sobre la pelota desde que se lanza hasta que se alcanza la máxima altura.

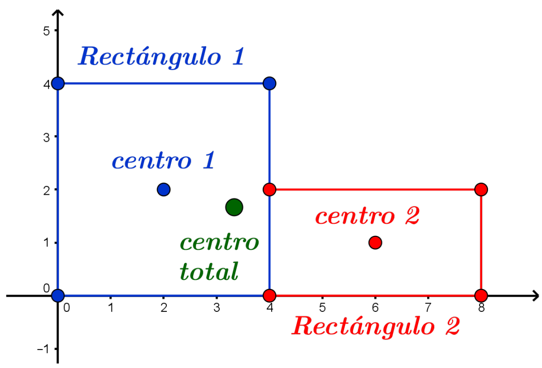
      2) Suponiendo que la fricción del aire realiza el mismo trabajo durante la caída, calcule el módulo de la velocidad de la pelota cuando vuelve al punto de partida.

10. El centro de gravedad de una superficie plana se define conceptualmente de la siguiente manera:

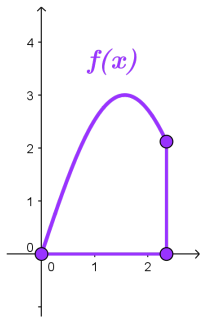
    Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del cartón.

    Claramente para un cuadrado, un rectángulo, una circunferencia y un triángulo equilátero, el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura.

    Si se pegan 2 rectángulos como en el de la figura, entonces el centro de gravedad es el centro total.



Para una superficie como la de la figura el centro de gravedad es (M_x, M_y), donde $M_y = \int_a^b f(x)^2dx$ y $M_x = \int_a^b f(x)xdx$. Bosquejar un argumento sobre esta fórmula a partir del caso de los rectángulos.



a) Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide ($f(x) = \sin(x)$).

b) Calcular el centro de gravedad de la figura comprendida entre la parábola $x^2 - 1$ y el eje Ox. Repetir la cuenta para la figura anterior intersección el primer cuadrante.

c) Calcular el centro de gravedad de un semicírculo. Calcular el centro de gravedad de una semi-elipse.

8. Complementarios

1. Sean f y g dos funciones integrables. Seleccione la cantidad mínima necesaria de hipótesis para que $f = g$ y dé un contraejemplo en los casos falsos.

   a) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que $\int_a^b f = \int_a^b g$, entonces $f = g$.

   b) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que $\int_a^b f = \int_a^b g$ y ademas f, g son continuas, entonces $f = g$.

   c) Si $\int_a^b f = \int_a^b g$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, entonces $f = g$.

   d) Si $\int_a^b f = \int_a^b g$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$ y f y g son continuas, entonces $f = g$.

2. Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1} dt$

3. **Otra posible definición de la función exponencial**
   Definimos la función logaritmo como una primitiva de $\frac{1}{x}$, mas precisamente

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

   a) Probar que la función $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ es creciente e infinitamente derivable.

   b) Definimos a la función inversa de log como $exp : I \to \mathbb{R}$, en su dominio de definición.
   Probar que $(\exp(x))' = (\exp(x))$

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada positiva y tal que $f(1) = 0$. Definimos $g(x) = \int_0^x f(t)dt$
   ¿Cuáles de los siguientes enunciados son ciertos?

   a) La función g es continua.

   b) La función g es derivable.

   c) La grafica de g tiene tangente horizontal en 1.

   d) La función g tiene un mínimo local en 1.

   e) La función g tiene un máximo local en 1.

   f) La función g tiene un punto de inflexión en 1.

g) La gráfica de g' corta al eje x en el punto $x = 1$.

5. *a*) Dé un ejemplo de 2 funciones f y g que sean integrables pero que $f \circ g$ no lo sea.

   b) Determinar si es verdadero o falso la siguiente afirmación. Si f^2 es integrable, entonces f lo es.

6. Se consideran las funciones $J, H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defindas por

$$J(x) = \arctan(x) - \frac{x}{x^2+1}, \quad H(x) = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{x^2}{x^2+1}} \sqrt{\frac{t}{1-t}}dt$$

   a) Calcular H', J', $J(1)$, $H(1)$.

   b) Hallar la fórmula explícita de $H(x)$. Distinguir para x positivo y negativo.

7. Calcular el área encerrada entre:

   a) La parábola $y = x^2$ y la recta $2x + 3$.

   b) La curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

   c) La recta $y = x + 5$ y la parábola $\frac{x^2}{2} + 1$.

8. Suponga que f' es integrable en $[0,1]$ y que $f(0) = 0$. Demuestre que para todo $x \in [0,1]$ se verifica

$$| f(x) | \leq \sqrt{\int_0^1 | f'(x) |^2 \, dx}$$

   Demuestre que la hipótesis $f(0) = 0$ es necesaria.

9. **Integrales de funciones trigonométricas racionales**

   Recordando que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ y $\cos(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, expresar $\sin(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ en función de $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

   a) Probar que integrales de la forma $\int R(\text{sen}(x), \cos(x))dx$, donde R es una función racional, pueden ser reducidas mediante sustitución $u = \tan(\frac{x}{2})$ a integrales de la forma $\int r(u)du$, donde r es también es una función racional. Calcular

$$\text{(a)} \quad \int \frac{dx}{\cos(x) + \sin(x)} \qquad \text{y} \qquad \text{(b)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)dx}{1 + \cos(x) + \sin(x)}$$

   b) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$ y la sustitución $x = a\sin(t)$. Calcular

$$\int \frac{xdx}{4 - x^2 + \sqrt{4 - x^2}}$$

   c) Idem con $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$ y la sustitución $x = a\sinh(t)$. Calcular

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}}$$

   d) Idem con $\int R(x, \sqrt{-a^2 + x^2})$ y la sustitución $x = a\cosh(t)$. Calcular

$$\int \frac{\sqrt{4x^2 - 1}}{x^2}$$

10. Sea $f : [0,8] \to \mathbb{R}$ continua con derivada continua, tal que $f(0) = f(2) = 0$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- $\int_0^8 f(x)\,dx = 3\int_0^2 f(x^3)x^2\,dx$
- $\int_0^2 e^x f'(x)\,dx = \int_0^2 2e^x f(x)\,dx$

11. *a*) Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t)dt\right)du$$

b) Demuestre que si f es continua, entonces

$$\int_0^x f(u)(x-u)^2du = 2\int_0^x \left(\int_0^{u_1} (f(t)dt)\,du_1\right)du_2$$

12. *a*) Integrando por partes, deducir la fórmula

$$\int \sin^n(x)\,dx = -\frac{\sin^{n-1}(x)\cos(x)}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)\,dx \qquad \forall n \leq 2$$

b) Hallar una fórmula de recurrencia para $\int \cos^n(x)\,dx$

c) Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4(x)\,dx\ ; \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(x)\,dx$$

d) Por definición, el doble factorial es $n!! = \pi_{k=0}^{m}(n-2k)$, donde $m = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ y $0!! = 1$. Sea $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$. Probar que

$$a_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\ ; \qquad \text{y que } a_{2n+1}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

e) Mostrar que $1 \leq \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}} \leq 1+\frac{1}{2n}$. Deducir que $\frac{\pi}{2} = \text{lím}_{n\to\infty} 2n(\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!})^2$. Concluir que $\sqrt{\pi} = \text{lím}_{n\to 0} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)!\sqrt{n}}$

f) Calcular las integrales

$$\text{(a)} \quad \int \sin^{2n}(x)\cos^{2m+1}(x)\,dx \qquad \text{(b)} \quad \int \sin^{2n}(x)\cos^{2m}(x)\,dx$$

13. Realice una lista de familias de funciones que sabe integrar, por ejemplo: polinomios, $\sin^2(ax)$, etc. Revisar cuantas de las integrales del práctico están incluidos en esa familia.