

Práctico 9

Completitud del Cálculo de Predicados

Nota general: En todos los casos en que se hace referencia a fórmulas se considera que son *sentencias*.

Ejercicio 1

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; -; 0 \rangle$ con un símbolo de predicado P (unario). Indique cuáles de los siguientes conjuntos son consistentes:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{\forall x P(x), \neg \exists x \neg P(x)\} & \Gamma_3 &= \{\exists x (P(x) \wedge \neg P(x))\} \\ \Gamma_2 &= \{\exists x P(x), \forall x \neg P(x)\} & \Gamma_4 &= \{\exists x P(x) \wedge \exists x \neg P(x)\} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sean T_1 y T_2 dos teorías arbitrarias. Muestre que:

- $T_1 \cap T_2$ es una teoría
- $\text{SENT} \setminus T_1$ no es una teoría
- $T_1 \cup T_2$ no es necesariamente una teoría

Ejercicio 3

Sea $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ un conjunto de teorías linealmente ordenadas por inclusión. Demuestre las siguientes propiedades:

- $T = \bigcup \{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ es una teoría que extiende cada T_i .
- Si cada T_i es consistente, entonces T es consistente.

Ejercicio 4

Recuerde las siguientes definiciones:

$$\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \models \Gamma\}, \text{ siendo } \Gamma \text{ un conjunto de sentencias.}$$

$$\text{Th}(k) = \{\alpha \mid (\forall \mathcal{M} \in k) \mathcal{M} \models \alpha\}, \text{ siendo } k \text{ un conjunto de estructuras.}$$

Demuestre las siguientes propiedades:

- Si $\Gamma \subseteq \Delta$ entonces $\text{Mod}(\Delta) \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$.
- Si $k_1 \subseteq k_2$ entonces $\text{Th}(k_2) \subseteq \text{Th}(k_1)$.
- $\text{Mod}(\Gamma \cup \Delta) = \text{Mod}(\Gamma) \cap \text{Mod}(\Delta)$.
- $\text{Th}(k_1 \cup k_2) = \text{Th}(k_1) \cap \text{Th}(k_2)$.
- $k \subseteq \text{Mod}(\Gamma)$ sii $\Gamma \subseteq \text{Th}(k)$.
- $\text{Mod}(\Gamma) \cup \text{Mod}(\Delta) \subseteq \text{Mod}(\Gamma \cap \Delta)$.
- $\text{Th}(k_1) \cup \text{Th}(k_2) \subseteq \text{Th}(k_1 \cap k_2)$.

Muestre además que en f y g la relación \subseteq no puede reemplazarse por $=$.

Ejercicio 5

Demuestre que:

- $\Gamma \subseteq \text{Th}(\text{Mod}(\Gamma))$.
- $k \subseteq \text{Mod}(\text{Th}(k))$.
- $\text{Th}(\text{Mod}(\Gamma))$ es una teoría con conjunto de axiomas Γ .

d. Si $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ entonces $Mod(\Gamma) = Mod(\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\})$.

Ejercicio 6

Considere el *teorema de compacidad* para la lógica de predicados:

“ Γ tiene modelo sii todo subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ tiene modelo.”

Dada la siguiente propiedad: Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Delta \models \varphi$ para un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$.

- Demuestre la propiedad usando completitud.
- Demuestre la propiedad usando compacidad en $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$.

Ejercicio 7

- Demuestre que si T_1 y T_2 son subconjuntos de SENT tales que $Mod(T_1 \cup T_2) = \emptyset$ entonces existe una fórmula φ tal que $T_1 \models \varphi$ y $T_2 \models \neg\varphi$.
- Demuestre que si T_1 y T_2 son teorías tales que $Mod(T_1 \cup T_2) = \emptyset$ entonces existe una fórmula φ tal que $\varphi \in T_1$ y $\neg\varphi \in T_2$.

Ejercicio 8

Sean $\Gamma \subseteq \text{SENT}$ y $\Delta \subseteq \text{SENT}$. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. En cada caso justifique su respuesta.

- Si $Mod(\Gamma \cap \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
- Si $Mod(\Gamma \cup \Delta) = \emptyset$ entonces Γ es inconsistente y Δ es inconsistente.
- Si Γ es consistente entonces $Th(Mod(\Gamma))$ es consistente.

Ejercicio 9

Demuestre que una sentencia α pertenece a todos los conjuntos consistentes maximales si y solo si α es lógicamente válida.

Ejercicio 10

Considere las siguientes sentencias de un lenguaje de primer orden con igualdad y tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0 \rangle$:

- $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(\neg x = y))$.
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)f(x) = y)$.
- $(\exists x)(\neg(\exists y)f(x) = y)$.
- $(\forall x)(P(x) \rightarrow (\forall y)f(x) = y)$.

- Indique cuáles de las sentencias anteriores no está en ningún conjunto consistente maximal. Justifique su respuesta.
- Indique cuáles de las sentencias anteriores están en todos los conjuntos consistentes maximales. Justifique su respuesta.
- Considere un conjunto consistente maximal Γ que contenga a la fórmula $(\forall x)P(x)$. Indique una pareja tomada de las fórmulas anteriores (excluyendo las seleccionadas en la parte a) que no pueda pertenecer a Γ simultáneamente.

Ejercicio 11

Considere un lenguaje \mathcal{L} de primer orden de tipo $\langle 1; -; 1 \rangle$ con símbolo de predicado P , y símbolo de constante c . Considere además el lenguaje \mathcal{L}' , el cual es una extensión de \mathcal{L} a la cual se le agrega el predicado unario Q . Sea $T \subseteq \text{SENT}_{\mathcal{L}}$ el siguiente conjunto:

$$T = \text{CONS}(\{\forall x P(x)\})$$

Considere además los siguientes subconjuntos de $\text{SENT}_{\mathcal{L}'}$:

$$T_1 = \text{CONS}(\{\forall x(Q(x) \wedge \neg Q(x))\})$$

$$T_2 = \text{CONS}(\{Q(c) \rightarrow \forall x P(x)\})$$

- Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son extensiones de T . Justifique.
- Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son extensiones conservativas de T . Justifique.
- Indique cuáles de los conjuntos T_1, T_2 son conjuntos de axiomas para T . Justifique.