Universidad de la República **Cálculo 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2017**

Práctico 6 - Derivación, segunda parte

1. Recta tangente, geometría y límites

1. En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

$$a)\quad f(x)=x^2,\ p=(3,9) \qquad b)\quad \cos(x),\ p=\left(\frac{\pi}{2},0\right) \qquad c)\quad \frac{x}{x^2+1},\ p=(0,0)$$

2. Bosquejar funciones f con derivada segunda tal que

   a) Los signos de f' y f'' sean positivos en todo $\mathbb{R}$
   b) El signo de f' sea positivo y el signo f'' sea negativo en todo $\mathbb{R}$
   c) El signo de f' sea negativo y el signo f'' sea positivo en todo $\mathbb{R}$
   d) Los signos de f' y f'' sean negativos en todo $\mathbb{R}$

3. Las funciones de la figura 2 son las derivadas de las funciones de la figura 1 en desorden. Indicar cuál es la derivada correspondiente de cada función.

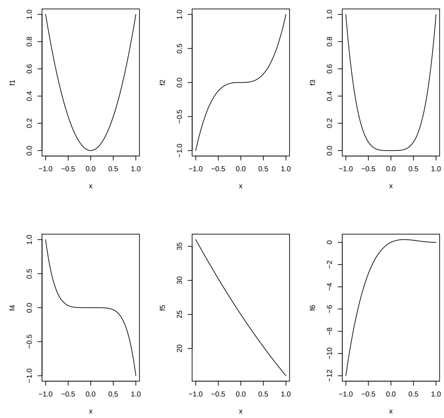


Figura 1: Funciones.

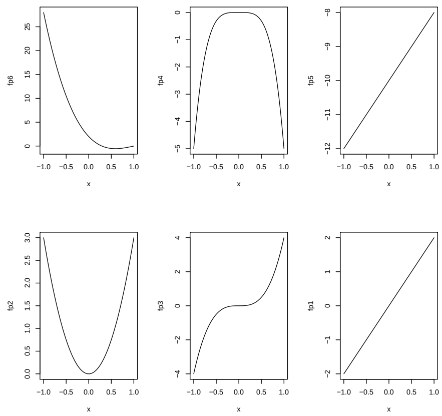


Figura 2: Derivadas.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1) = f(-1) = 0$ pero sin embargo f' no se anula en el intervalo $(-1, 1)$. Explicar por que esto no contradice el teorema de Rolle.

5. Verifique si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange en los intervalos indicados. En caso afirmativo, hallar algún valor intermedio que verifique la conclusión del teorema.

   a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $[\frac{1}{2}, 1]$.

   b) $f(x) = x \log x$ en $[1, e]$.

   c) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $[-1, 1]$.

   d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ en $[1, 3]$.

6. Calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

7. Determinar si existen, y en caso de existencia, calcular los siguientes límites usando la regla de L'Hôpital:

$$a)\ \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \qquad b)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)} \quad b \neq 0 \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1 - \sin(x)}{x^2} \qquad d)\ \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x+x^2) - x}{x^2}$$

$$e)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^4} \qquad f)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+x^2} - 1 - (x+x^2)}{x^2} \qquad g)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^a)}{x} \qquad a > 0$$

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, probar que f es constante

9. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Probar que si existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x) = L$ entonces f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(0) = L$

2. Monotonía y extremos

1. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función con derivada segunda continua y $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la recta tangente a f en 0. De ejemplos de funciones f para que se cumplan:

    1) Para todo x, se tiene que $f(x) \geq r(x)$ además $f(x) = r(x)$ solo si $x = 0$. Discuta sobre si alguna propiedad en f'' garantiza lo que se pide
    2) Para todo $x > 0$, se tiene que $f(x) > r(x)$ y Para todo $x < 0$, se tiene que $f(x) < r(x)$.

    b) Probar que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada segunda positiva entonces es convexa. Deducir que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en esas hipotesis realiza su maximo en a o b

2. Demuestre que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1,1]$, cualquiera sea el valor de b.

3. Demuestre que la ecuación $x^2 = x\text{sen}(x) + \cos(x)$ tiene exactamente dos raíces reales.

4. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$.

    a) Hallar el intervalo de longitud máxima, que contenga al 0 en el que se puede definir la inversa de f (sea g esta inversa).

    b) Graficar g y hallar $g'(4)$.

5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^{17} + x^{13} + x^7 + x^3 + 5x - 5$. Investigar si f es invertible y en caso de que lo sea calcular $(f^{-1})'(4)$.

6. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

    tiene derivada positiva en $x = 0$, pero no es creciente en ningún intervalo que contenga a $x = 0$ (tiene intervalos tan cercanos a $x = 0$ como se quiera en que su derivada es negativa, y por lo tanto, en esos intervalos es decreciente).

7. Probar las siguientes desigualdades

    a) Para todo $x > 0$, $\frac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$

    b) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin(\alpha x) - \sin(\alpha y)| \leq |\alpha| |x - y|$

    c) Para $0 < a < 1$, se ferifica que $(1+x)^a \leq 1 + ax$, $\forall x \leq 1$

8. *a*) Dado $s > 0$, probar que entre todos los reales $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $x + y = s$, el valor $x^2 + y^2$ es minimo cuando $x = y$.

    b) Hallar el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo, teniendo la base inferior en el diámetro.

9. Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados

$$a) \quad f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1 \text{ en } [-2,2] \qquad b) \quad f(x) = x^5 + x + 1 \text{ en } [-1,1]$$

$$c) \quad f(x) = \frac{x+1}{x^2+1} \text{ en } \left[-1, \frac{1}{2}\right] \qquad d) \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1} \text{ en } [0,5]$$

$$e) \quad f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x+a|} \quad , a > 0, \text{ en } \mathbb{R}$$

3. Modelos

1. Discuta si la siguiente situación es posible, en caso de que lo sea dé un ejemplo, sino explique que impide la situación. Se tiene un auto cuyo velocímetro marca siempre $4,2m/s$, además en el instante de salida $t = 0s$ se encuentra en la misma posición que en el instante $t = 10s$. ¿Se podría decir algo sobre la aceleración del vehículo?

2. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronada con un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en el rectángulo y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal de color deja pasar la mitad luz (por unidad de superficie) que el blanco. Calcule las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un Perímetro constante dado. Repita el ejercicio para Área constante.

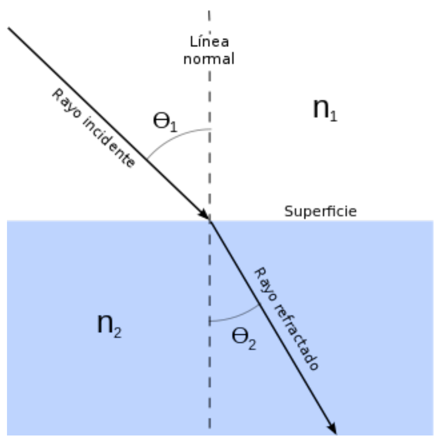
3. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo, si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10 cm. b) 12 y 18 cm.

4. Refracción de la luz

   La rapidez con que viaja la luz depende de el medio en el que se propague

Medio	*Vacio*	*Aire*	*Agua (a 20°)*	*Alcohol etilico*	*Cuarzo*
Velocidad (m/s) Aproximada	299,792,458	299,705,543	224,844,349	220,435,631	194,166,099

   Suponga que un rayo de luz viaja desde el punto A hasta el B atravez de distintos medios. La trayectoria de un rayo de luz es siempre de forma de minimizar el tiempo de viaje. Para obtener esto hay un quiebre en la dirección del ángulo, como muestra la figura.



   A el ángulo θ_1 se lo llama ángulo de incidencia mientras que al álguno θ_2 se lo llama ángulo de refracción

   a) Suponga que tiene en el plano dos medios, Aire en los puntos con coordenada y positiva y Agua en los puntos con coordenada y negativa
   Para los casos *a*) $A = (0,5), B = (0,-3)$ *b*) $A = (0,1), B = (1,-1)$ *c*) $A = (0,2), B = (2,3)$
   Calcular los ángulos de refracción e incidencia.

   b) Probar que si c_1 y c_2 son las velocidades de la luz en los medios 1 y 2 respectivamente se tiene la Ley de Smell, esto es

$$\frac{\sin(\theta_1)}{c_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{c_2} \tag{1}$$

5. Un globo de aire caliente que asciende en línea recta es rastreado por un observador a 150 metros. En el momento en que el ángulo de observación del observador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo crece a razón de 0,14 rad/min ¿Qué tan rápido se esta elevando el globo en ese momento?

6. El gasto cardiaco de una persona esta dado por la cantidad de sangre bombeada por unidad de tiempo.

   Gastos aproximados en algunas situaciones

Actividad	*Lectura*	*Reposo*	*Maraton*
Gasto	$7\ L/m$	$6\ L/m$	$30\ L/m$

   El gasto cardiaco puede calcularse mediante la formula $y = \frac{Q}{D}$

   donde Q es la cantidad de mililitros de CO_2 que se exhala en un minuto y D es la diferencia entre la concentración de CO_2 (mL/L) en la sangre bombeada a los pulmones y la concentración de CO_2 en la sangre que regresa a los pulmones.

   Suponga que sabemos que $Q = 233$ y $D = 41$, también sabemos que D esta decreciendo a una razón de 2 unidades por minutos y que Q permanece sin cambios. ¿Qué esta pasando con el gasto cardiaco? Calcular la razón de variación de y en función de Q y de D

   Ejercicio del libro: Calculo Una Variable (undécima edición) George B. Thomas, Jr

7. Se tiene un cubo de hielo de lado s, por tanto $V = s^3$ y su área superficial es de $A = 6s^2$. Suponga que se deja fuera del freezer y por tanto comienza a derretirse, suponga además que mientras se derrite conserva su forma cúbica.

   La razón a la que el volumen disminuye es proporcional al área superficial, es decir $\frac{dV}{dt} = -kA$, donde K es una constante positiva. Hay otros factores que actúan en este ejemplo pero no los tendremos en cuenta.

   Si se sabe que el cubo pierde un cuarto de su volumen durante la primer hora y que el volumen es V_0 cuando $t = 0$. ¿Cuánto tardará el cubo de hielo en derretirse?

8. Una plataforma petrolífera se encuentra a $20km$ de la costa debe ser conectada a una refinería que esta a $32km$ en línea recta desde el punto mas cercano a la plataforma. Si instalar la tubería debajo del agua cuesta \$350 por cada kilometro y en tierra cuesta \$200 por kilometro.. ¿Qué combinación de instalación subacuática y terrestre da la conexión mas barata?

9. Sobre la tos. Cuando tosemos, la tráquea se contrae para incrementar la velocidad del aire de salida, pero cuanto debe contraerse la tráquea para que esta velocidad sea máxima. ¿Realmente se contrae la tráquea cuando tosemos?

   Bajo hipótesis razonables acerca de la elasticidad de la pared de la tráquea y respecto a cómo se frena el aire cerca de la pared por la fricción, la velocidad promedio del flujo de aire puede ser modelada por la ecuación

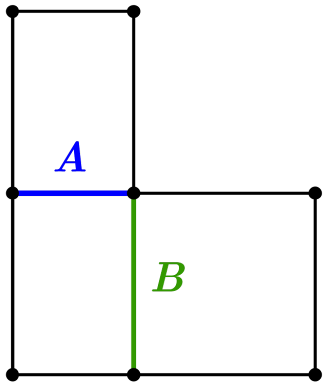
   $$v(r) = c(r_0 - r)r^2, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0 \tag{2}$$

   donde r_0 es el radio de la tráquea en reposo, en cemtímetros, y c es una constante positiva que depende en parte de la longitud de la tráquea.

   a) Calcule el valor r, en función de r_0 donde se da el máximo. Las radiografías confirman que la tráquea realmente se contrae a valores cercanos a ese r cuando tosemos.

   b) Tome $r_0 = 0,5$ y $c = 1$, y grafique $v(r)$ en el intervalo $[0; 0,5]$. ¿Cuál es el máximo de v en ese intervalo? ¿En qué punto o puntos se realiza?

10. Determinar cuál es la longitud en metros aproximada de la escalera mas larga que se puede transportar de forma horizontal alrededor de la esquina del corredor que se muestra en la figura con $A = 2m$, $B = 3m$.



¿Qué ocurriría si $A = B = 3m$?

11. En este ejercicio estudiaremos algunos envases cilíndricos.

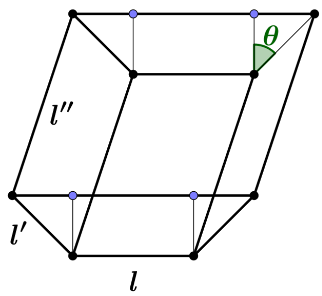
- Cerveza 473 cm^3. Dimensiones aproximadas 6.5cm de diámetro, 14.5 cm de altura
- Refresco 354 cm^3. Dimensiones aproximadas 6.5 cm de diámetro, 11 cm de altura.
- Choclo. Dimensiones aproximadas 7.5 cm de diámetro, 8,5 cm de altura.

a) Calcular la capacidad de la latas de choclos.

b) Calcular las dimensiones óptimas, en cuanto a su superficie, de la lata de Cerveza. en diámetro y altura para que tenga la capacidad de 473 cm^3. Repetir lo mismo para la lata de Refresco y la de Choclo.

c) ¿Cuál está, en proporción, más cerca de la óptima? Realice hipótesis sobre los motivos de estos resultados.

12. Se desea construir un bebedero para caballos como en la figura. El gasto que quiere realizarse está fijo, es decir l, l' y l''. Maximizar la capacidad del bebedero en función de θ.



4. Complementarios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que existen los límites $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. Probar que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

   Muestre con un ejemplo que la hipótesis de existencia del límite $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ es necesaria

2. Sea f una función dos veces derivable tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$. Probar que existe un $x \in (0,1)$ tal que $|f''| > 4$

3. **Método de Newton**

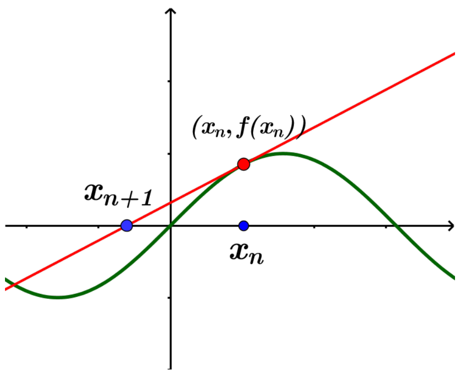
   El método de Newton es una manera de encontrar soluciones a ecuaciones, por ejemplo raíces de una función, de forma aproximada.

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable, el método se puede extender a otras funciones pero trabajaremos con estas.

   Definimos así la siguiente sucesión por recurrencia, dado $x \in \mathbb{R}$ cualquiera

   - $x_0 = x$
   - $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

   La interpretación geométrica de esta sucesión es la siguiente, dado x_n se traza la recta tangente a f por el punto $(x_n, f(x_n))$ y se marca el punto intersección con el eje Ox.



   Determinar cuándo hay problemas para la definición recursiva de x_n

   Supongamos ahora que la sucesión esta bien definida, llamemos g a la función, $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

   a) Probar que si x_n es raíz de f, entonces $\forall m \geq n$ se tiene que $x_m = x_n$.

   b) Probar que si a es raíz de f y $f'(a) \neq 0$, entonces $g(a) = a$ y $g'(a) = 0$.

   c) Probar que si a es una raíz de f, y $f'(a) \neq 0$ existe un entorno I_a tal que $\forall x \in I_a$ se verifica que $|g(x) - a| = |g(x) - g(a)| \leq |x - a|$. Concluir que existe un intervalo I_a de a tal que si $x_0 \in I_a$ entonces $\lim_{n\to+\infty} x_n = a$.
   Probar que además $\exists I_a$ un intervalo de a tal que $|g(x) - g(a)| \leq \frac{1}{2} |x - a|$

   d) Supongamos que f es tres veces derivable y que $f^{(3)}$ es continua. Probar que existe una constante k y un intervalo I_a de a, tal que $|a - g(x)| \leq k |a - x|^2$ para todo $x \in I_a$. Sugerencia: aplicar el teorema de valor medio en $g^{(2)}$ A esta propiedad se le llama convergencia cuadrática.

   e) Aplicar este método para encontrar soluciones aproximadas a las siguientes ecuaciones. Determinar Cuántos pasos se necesita para obtener aproximaciones a menos de 10^{-3} y a menos de 10^{-9}.

   $$a)\quad x + \cos(x) = 0 \qquad b)\quad 2\cos(x) - x^4$$