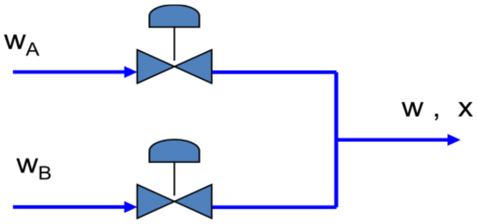
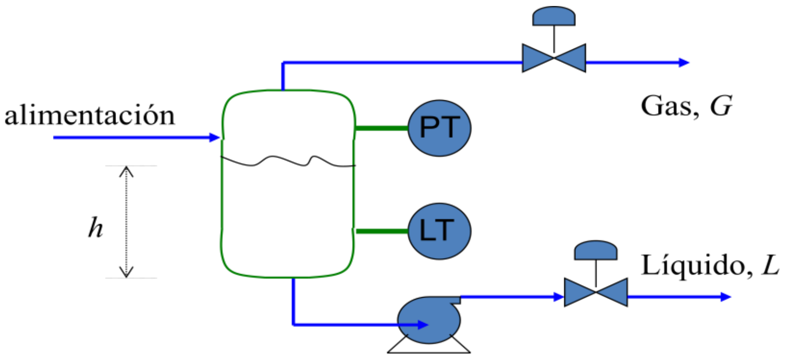
20 CONTROL MIMO

Hasta el momento hemos venido estudiando problemas donde una señal de entrada genera una señal de salida (Single Input – Single Output, SISO). Pero en la práctica en general se presentan muchas variables a controlar a la vez, que responden a los estímulos de distintas señales de entrada a la vez (Multiple Input – Multiple Output, MIMO). Por ejemplo, alcanza con que tengamos que controlar producción (en el sentido de cantidad producida) y calidad (en el sentido de composición) de un proceso para que tengamos al menos dos salidas.

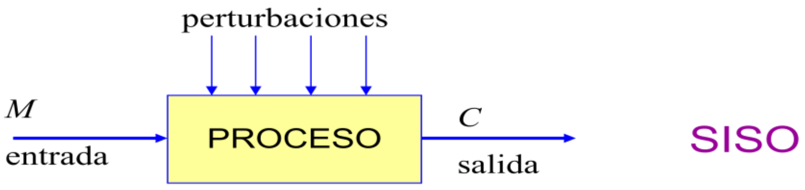
Un caso tan sencillo como una simple mezcla de corrientes implica un control MIMO:



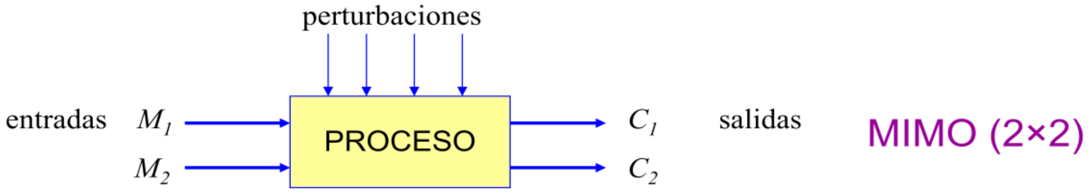
Un tanque de flasheo también implica varias variables de entrada y de salida:



En forma esquemática



Si tenemos dos entradas y dos salidas



Para definir la dinámica de un proceso 2x2 son necesarias cuatro funciones de transferencia:

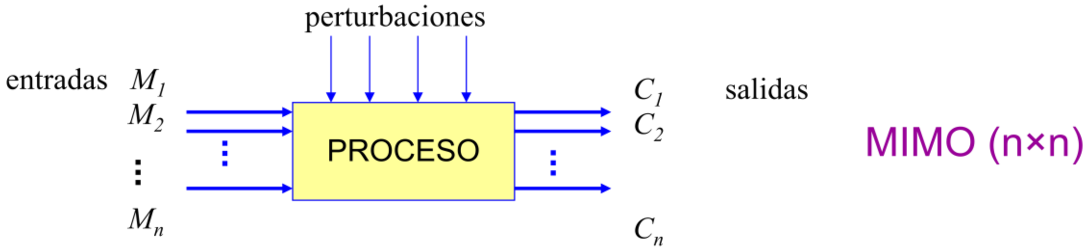
$$\frac{C_1(s)}{M_1(s)} = G_{p11}(s) \quad \frac{C_1(s)}{M_2(s)} = G_{p12}(s)$$
$$\frac{C_2(s)}{M_1(s)} = G_{p21}(s) \quad \frac{C_2(s)}{M_2(s)} = G_{p22}(s)$$

$$C_1(s) = G_{p11}(s)M_1(s) + G_{p12}(s)M_2(s)$$
$$C_2(s) = G_{p21}(s)M_1(s) + G_{p22}(s)M_2(s)$$

O en forma matricial

$$\mathbf{C}(s) = \mathbf{G_p}(s)\mathbf{M}(s)$$

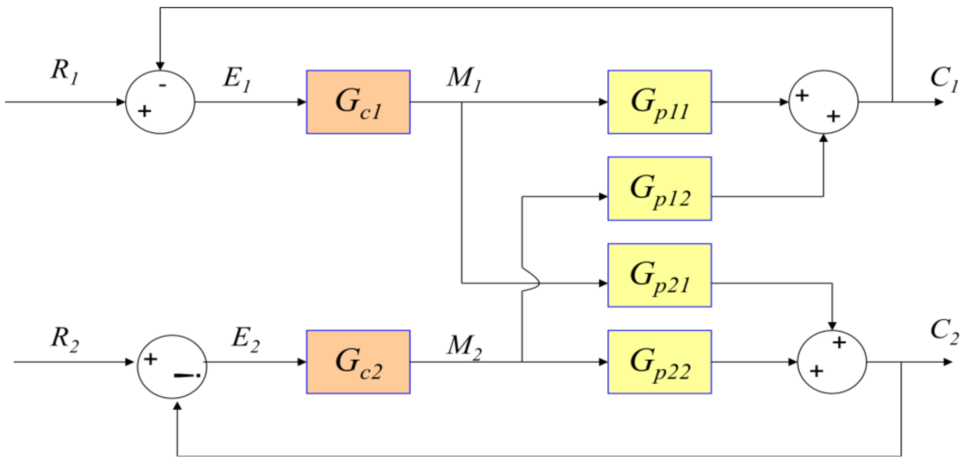
Y en forma general



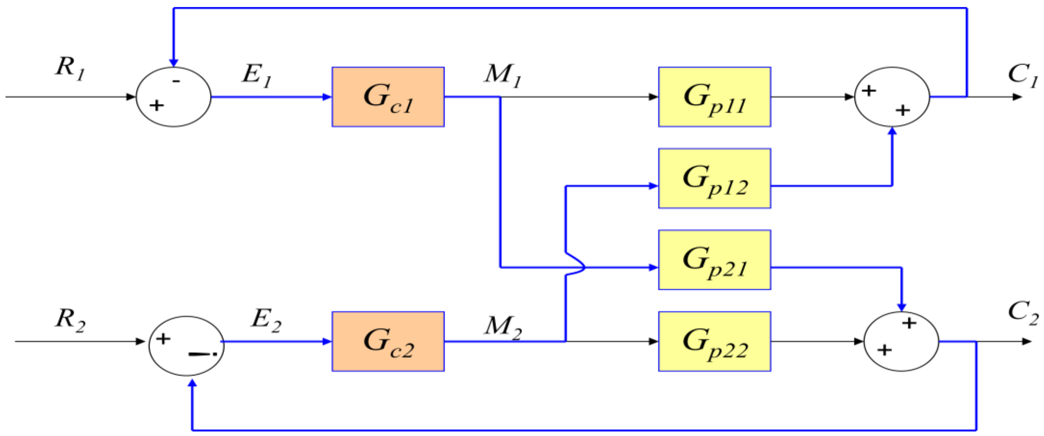
Cuando intervienen varias variables se dan interacciones entre ellas. En general, para un problema con *n* variables podrían plantearse en principio *!n* interacciones

Volviendo a un sistema de 2x2, pueden identificarse dos tipos de "acoplamientos" ("coupling") o emparejamiento entre las señales:

Una alternativa es el acoplamiento 1–1 / 2–2, donde la señal de salida C_1 retroalimenta directamente al controlador G_{C1} y la señal de salida C_2 retroalimenta a G_{C2}:



En este esquema de conexión puede identificarse un “lazo oculto”, donde la salida de G_{C1} también incide en C_2 y la salida de G_{C2} incide sobre C_1:



Esto muestra la interconexión de ambos lazos principales entre si, o sea la interacción entre ellos. Este lazo “oculto” tiende a desestabilizar a los otros lazos y a hacer complicado el ajuste de los controladores (que se ajustan en función de sus respectivos lazos principales).

Si no existiera ese lazo “oculto”, supongamos que el controlador 2 se desconectara de modo que $M_2(s) = 0$. Entonces

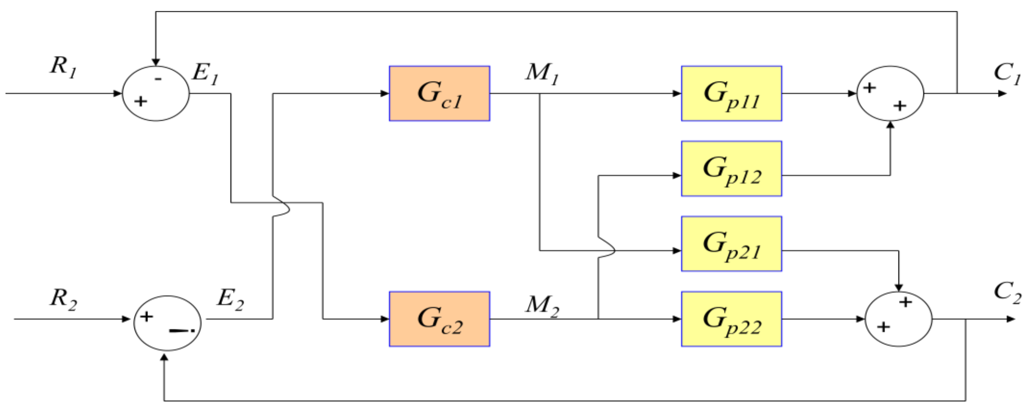
$$\frac{C_1(s)}{M_1(s)} = G_{p11}(s)$$

Pero en general

$$\frac{C_1(s)}{M_1(s)} = G_{p11}(s) - \frac{G_{p12}G_{p21}G_{c2}}{1 + G_{c2}G_{p22}}$$

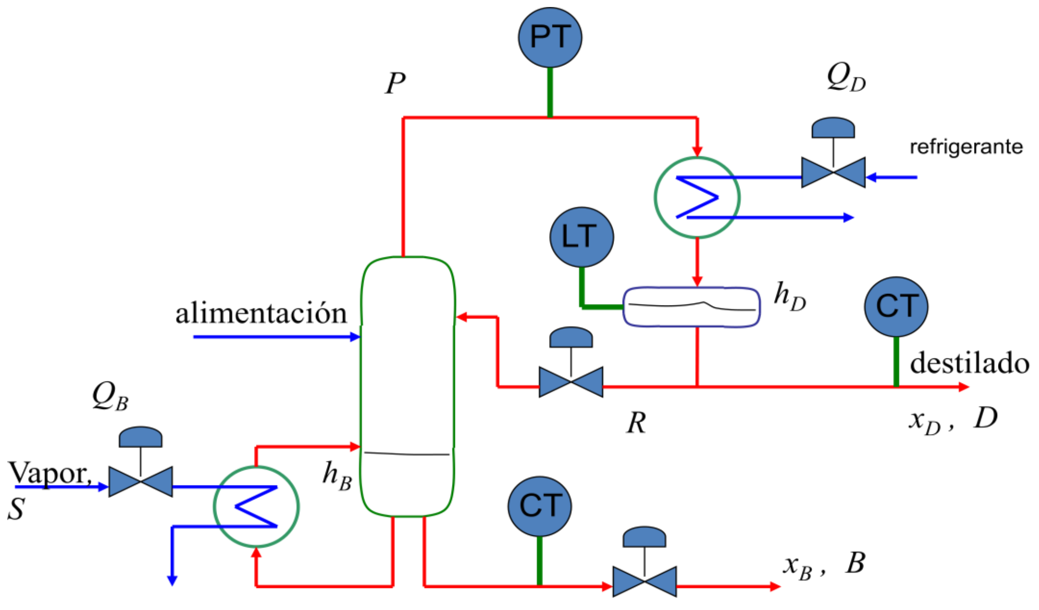
y el segundo término es el término de interacción entre los dos lazos. Obsérvese entonces que ambos lazos no pueden ser ajustados independientemente.

La otra alternativa es el acoplamiento 1 – 2 / 2 – 1



Pero pueden realizarse las mismas consideraciones que antes.

En un sistema algo más complejo se incrementa notoriamente el número de variables a controlar y manipular a la vez. Por ejemplo, en un esquema (simplificado) de torre de destilación:



Variables a controlar: x_D, x_B, P, h_D, h_B
Variables a manipular: D, B, R, Q_D, Q_B

En principio habría !5 = 120 posibilidades de vinculación, aunque algunas no son muy razonables desde el punto de vista físico (p.ej. es poco razonable querer controlar h_B ajustando el flujo de destilado). Se torna importante contar con una metodología para ordenar el trabajo. Una alternativa es la siguiente:

Método de las ganancias relativas (“relative gain array”)

Se define como ganancia relativa entre dos variables i , j

$$\lambda_{ij} = \frac{\left(\partial C_i / \partial M_j\right)_M}{\left(\partial C_i / \partial M_j\right)_C} = \frac{\textit{ganancia de bucle abierto}}{\textit{ganancia de bucle cerrado}}$$

Se construye la siguiente matriz de ganancias relativas

$$\Lambda = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & \dots & M_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Consideremos el caso más simple, un sistema de 2x2:

$$C_1 = K_{11}M_1 + K_{12}M_2$$
$$C_2 = K_{21}M_1 + K_{22}M_2$$

donde

$$\left(\frac{\partial C_1}{\partial M_1}\right)_{M_2} = K_{11}$$

Para calcular $\left(\partial C_1/\partial M_1\right)_{C_2}$ como $C_2 = 0$ (variable desviación),

$$M_2 = -\frac{K_{21}}{K_{22}}M_1$$

Entonces $C_1 = K_{11}\left(1-\frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}\right)M_1$ $\left(\frac{\partial C_1}{\partial M_1}\right)_{C_2} = K_{11}\left(1-\frac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}\right)$

Por lo tanto $\lambda_{11} = \dfrac{1}{1-\dfrac{K_{12}K_{21}}{K_{11}K_{22}}}$ $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 1-\lambda_{11}$ $\lambda_{22} = \lambda_{11}$

En resumen $\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \lambda \end{bmatrix}$

Puede observarse que si λ es próximo a 1 la interacción entre C_1 y M_1 es muy fuerte, mientras que el segundo bucle no ejerce gran influencia. Entonces la configuración preferida es la 1-1/2-2.

Si λ es próximo a cero sería lo contrario y la configuración preferida sería 1-2/2-1.

Las mayores interacciones entre los bucles se dan cuando $\lambda = 0.5$.

Si $\lambda > 1$ al cerrar el segundo bucle se reduce la ganancia entre C_1 y M_1; el efecto es mayor a mayor λ . Si $\lambda < 0$ las ganancias de bucle abierto y de bucle cerrado entre C_1 y M_1 son de distinto signo y por lo tanto no deben vincularse; el efecto es mayor a mayor valor absoluto de λ.

Análisis de Valores Singulares

En el análisis de valores singulares ("Singular Value Analysis, SVA") consideramos un sistema lineal en estado estacionario

$$y = \boldsymbol{K}u$$

Asumamos que todas las n ecuaciones son linealmente independientes; de lo contrario se dice que la matriz es mal condicionada. Los valores singulares $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ se definen como la raíz positiva del cuadrado de los valores propios de la matriz $\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{K}$;

normalmente se ordenan de mayor a menor. Se puede descomponer la matriz $\boldsymbol{K}$ de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W\Sigma V}^T$$

donde Σ es la matriz diagonal de los valores singulares, cumpliéndose además que $\boldsymbol{WW^T} = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{VV^T} = \boldsymbol{I}$

Se define el número de condición o "condition number": $CN = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$ donde σ_r es el menor valor singular no nulo. La regla es que cuanto menor sea *CN* mejor resulta la vinculación entre entrada y salida.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un proceso cuya matriz de ganancias relativas sea

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & K_{12} \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que $K_{12} = 0$. Calculamos los valores propios de la matriz $|\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$
Surge $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, lo cual sugiere un emparejamiento 1-1 / 2-2 .

Calculamos ahora los valores singulares:

$$\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101 & 10 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$|\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K} - \lambda \boldsymbol{I}| = 0$ entonces $\lambda_1' = 101.99$ $\lambda_2' = 0.01$

$\sigma_1 = \sqrt{101.99} = 10.1$ $\sigma_2 = \sqrt{0.01} = 0.1$

$$CN = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{10.1}{0.1} = 101$$

Con este alto valor del CN se observa que el sistema es "mal condicionado", o sea va a ser muy sensible al valor de K_{12}. Si tomáramos $K_{12} = 0.1$ la matriz $\boldsymbol{K}$ sería singular, el $\sigma_2 = 0$ y por tanto el *CN* infinito. Por lo tanto en este caso el sistema va a ser difícil de controlar (muy sensible a pequeñas variaciones) con el emparejamiento 1-1/2-2.

Veamos otro ejemplo: un sistema definido por

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.48 & 0.90 & -0.006 \\ 0.52 & 0.95 & 0.008 \\ 0.90 & -0.95 & 0.020 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

El arreglo de ganancias relativas da $\Lambda = \begin{bmatrix} -2.4376 & 3.0241 & 0.4135 \\ 1.2211 & -0.7617 & 0.5407 \\ 2.2165 & -1.2623 & 0.0458 \end{bmatrix}$

Si bien no son números muy concluyentes sugieren apareamientos y_1-u_2 , y_2-u_3 , y_3-u_1 .
Calculamos ahora

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W\Sigma V}^T$$

$$\mathrm{W} = \begin{bmatrix} 0.5714 & 0.3766 & 0.7292 \\ 0.6035 & 0.4093 & -0.6843 \\ -0.5561 & 0.8311 & 0.0066 \end{bmatrix} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 1.618 & 0 & 0 \\ 0 & 1.143 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00976 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.0541 & 0.9984 & 0.4135 \\ 0.9985 & -0.0540 & -0.0068 \\ -0.0060 & 0.0154 & -0.9999 \end{bmatrix}$$

$$CN = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1.618}{0.00976} = 166.5$$

Dos valores singulares son de similar magnitud y otro es mucho más pequeño; esto sugiere que solo dos variables van a poder ser controladas de buena manera. Entonces, se procede a eliminar un par de variables y estudiar el emparejamiento entre las restantes:

Variables contraladas	Variables manipuladas	*CN*	λ
y_1 , y_2	u_1 , u_2	184	39.0
y_1 , y_2	u_1 , u_3	72	0.55
y_1 , y_2	u_2 , u_3	133	0.56
y_1 , y_3	u_2 , u_1	1.51	0.64
y_1 , y_3	u_1 , u_3	69	0.64
y_1 , y_3	u_2 , u_3	139	1.46
y_2 , y_3	u_2 , u_1	1.45	0.63
y_2 , y_3	u_1 , u_3	338	3.25
y_2 , y_3	u_2 , u_3	68	0.71

Los acoplamientos y_1-u_2 / y_3-u_1 y y_2-u_2 / y_3-u_1 son los que parecen más promisorios por tener menor *CN*, aunque haya otros que tienen λ de similar magnitud. El primero de ellos es consistente con el resultado que surgía del arreglo de ganancias relativas pero el segundo no.

Estrategias para reducir las interacciones entre los bucles

No hay reglas absolutas, pero en muchos casos pueden funcionar. Por ejemplo, partiendo de un ajuste realizado sobre el bucle "abriendo" los demás, "desajustar" uno o más controladores feedback, haciendo más conservadores los valores de los parámetros (menor K_c y mayor t_I).

Ir realizando los "desajustes" en forma secuencial, partiendo del bucle más rápido.

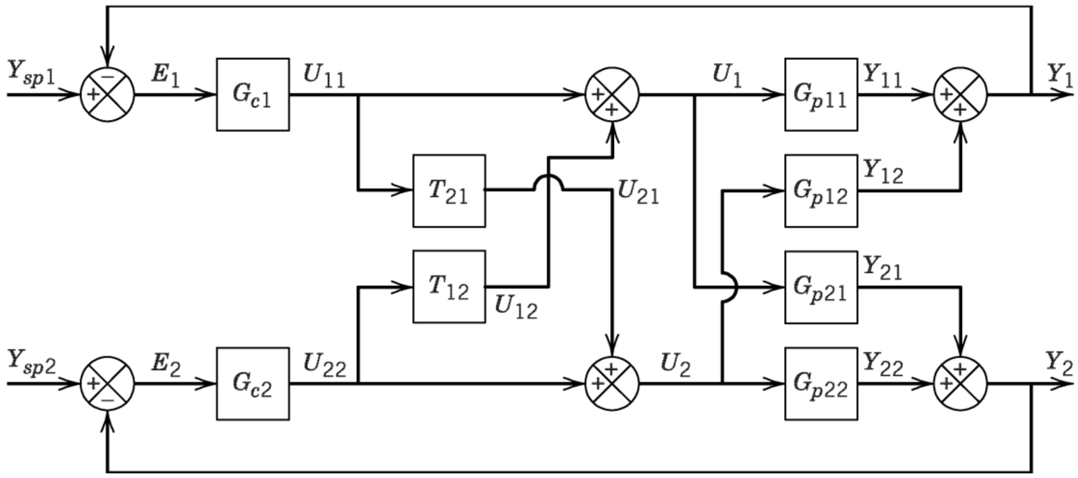
Elegir otras variables a controlar o manipular; p.ej. la suma o la diferencia o el cociente de variables.

Considerar un sistema de control multivariable; esto es, cada variable manipulada es ajustada teniendo en cuenta los errores de varias variables controladas.

Uso de desacopladores.

Desacopladores

Los desacopladores ("decouplers") son funciones de transferencia intermedias que se agregan para compensar las interacciones provenientes del otro bucle. Por ejemplo, T_{21} y T_{12}:



T_{21} se diseña para cancelar Y_{21}, que es la señal que vincula U_1 con Y_2. En la suma para dar Y_2 debe cancelarse la contribución de U_{11} (a través de G_{p21}) con la contribución que sale del decoupler (U_{21}) a través de G_{p22}:

$$G_{p21}U_{11} + G_{p22}U_{21} = 0$$
$$\left(G_{p21} + G_{p22}T_{21}\right)U_{11} = 0$$
$$G_{p21} + G_{p22}T_{21} = 0$$

$$T_{21} = -\frac{G_{p21}}{G_{p22}}$$

Y en idéntica forma el otro. Se pueden generar otros esquemas.