Práctico 7
Semántica de la Lógica de Predicados

Ejercicio 1

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2, 2, 1; 1\rangle$. Sea A una estructura de dicho tipo definida como sigue: $A = \langle \mathbb{N}, +, *, S, 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$.

a. Defina los símbolos del alfabeto y dé dos términos distintos t_1 y t_2 del lenguaje tales que ${t_1}^A = {t_2}^A = 5$.

b. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay un término t tal que $t^A = n$.

c. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ hay infinitos términos t tales que $t^A = n$.

Ejercicio 2

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 1, 1, 2; 3\rangle$ con símbolos de función f_1, f_2 (unarios), f_3 (binario) y símbolos de constante c_1, c_2, c_3.

Sea B una estructura de dicho tipo definida como sigue: $B = \langle \mathbb{R}, {}^2, |\ |, -, 0, 1, 2\rangle$ donde ^{2} es la función cuadrado, $|\ |$ el valor absoluto y $-$ la resta.

Evalúe: $(f_2(f_3(f_1(c_3), f_1(c_2))))^B$ y $(f_2(f_3(c_2, f_3(c_2, f_1(c_3)))))^B$.

Ejercicio 3

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2, 2; 2\rangle$ con símbolos de función f_1, f_2 y símbolos de constante c_1, c_2. Sea A una estructura del mismo tipo definida como sigue: $A = \langle Z, +, *, 1, 2\rangle$ donde Z es el conjunto de los números enteros.

Demuestre por inducción que para todo término *cerrado* t (sin constantes extendidas) se cumple que $t^A > 0$.

Ejercicio 4

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 1, 2; 1\rangle$ con símbolos función f_1 (unario), f_2 (binario) y símbolo de constante c_1. Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

$A = \langle \mathbb{N}, S, +, 0\rangle$ donde $S(x) = x + 1$

$B = \langle \mathbb{N}, D, *, 1\rangle$ donde $D(x) = 2 * x$

Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que $t^B = 2^{t^A}$.

Ejercicio 5

El teorema 2.4.5 se cumple para fórmulas cerradas (*sentencias*). ¿Cuáles casos de dicho lema dejan de cumplirse si consideramos fórmulas que *no* son sentencias?

Ejercicio 6

a. Sabemos que para toda *sentencia* σ y estructura A del tipo adecuado se cumple que $A \models \sigma$ o $A \models \neg\sigma$. Muestre que esta propiedad no vale para σ con $\mathrm{FV}(\sigma) \neq \emptyset$.

b. Muestre que ni aún para el caso en que σ sea una *sentencia* vale que $\models \sigma$ o $\models \neg\sigma$.

Ejercicio 7

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 1; 1; 1\rangle$ con símbolos de predicado P_1, P_2 (unarios), símbolo de función f_1 (unario) y símbolo de constante c_1.

Considere los siguientes lenguajes:

i. $\varepsilon \in L_1$	i. $\varepsilon \in L_2$
ii. si $\omega \in L_1$ entonces $a\omega \in L_1$	ii. si $\omega \in L_2$ entonces $b\omega \in L_2$
iii. si $\omega \in L_1$ entonces $c\omega \in L_1$	iii. si $\omega \in L_2$ entonces $c\omega \in L_2$

Sea la estructura $M = \langle \Sigma^*, L_1, L_2, F, \varepsilon\rangle$ con $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $F : \Sigma^* \to \Sigma^*$ una función que dada un tira reemplaza todas las ocurrencias de 'a' por 'b'.

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $M \models (\forall x)(P_1(x) \vee P_2(x))$

b. $M \models (\forall x)(P_1(x) \to P_2(f_1(x)))$

c. $M \models (\exists x)(P_1(x) \wedge P_2(x))$

Ejercicio 8

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1, 1, 2; 2, 1; 0\rangle$ con símbolos de predicado P_1, P_2 (unarios), P_3 (binario) y símbolos de función f_1 (binario), f_2 (unario).

Sea la estructura

$$M = \langle \mathtt{PROP}, \{\varphi \mid\ \models \varphi\}, \{\bot\}, \{(\varphi_1, \varphi_2) \mid \varphi_1 \text{ eq } \varphi_2\}, F_\wedge, F_\neg\rangle$$

donde $F_\wedge(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ y $F_\neg(\varphi) = \neg(\varphi)$.

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $M \models (\forall x)(P_1(f_2(x)) \to (\exists y(P_2(y) \wedge P_3(x, y))))$

b. $M \models (P_1(x) \to P_2(x))$

c. $M \models (\forall x)(\forall y)(P_1(x) \wedge P_1(y) \to P_1(f_1(x, y)))$

Ejercicio 9

Demuestre que para dos fórmulas cualesquiera φ y ψ se cumple que:

Si (para toda estructura A del tipo adecuado $(A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi)$) entonces $(\models \varphi \Rightarrow \models \psi)$.

Muestre que el recíproco no se cumple.

Ejercicio 10

Sean φ y ψ fórmulas cualesquiera de FORM.

a. Demuestre que: si $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ y $\models \varphi$ entonces $\models \psi$

b. Demuestre que: $\models (\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi)) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

c. Recordando que φ es equivalente a ψ sii: $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, demuestre que:
$\forall x(P(x) \to Q(x))$ es equivalente a $\forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

Ejercicio 11

Sean φ, ψ dos fórmulas y x una variable tal que $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$.

a. Demuestre usando equivalentes las siguientes afirmaciones:
   I. $\models (\forall x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \to \psi)$
   II. $\models (\exists x\varphi \to \psi) \leftrightarrow \forall x(\varphi \to \psi)$
   III. $\models (\psi \to \exists x\varphi) \leftrightarrow \exists x(\psi \to \varphi)$
   IV. $\models (\psi \to \forall x\varphi) \leftrightarrow \forall x(\psi \to \varphi)$

b. Muestre que la condición sobre x y $\mathrm{FV}(\psi)$ es necesaria para que se cumplan las afirmaciones anteriores.

Ejercicio 12

Sean φ, ψ fórmulas cualesquiera de FORM. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a. $\not\models \forall x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\forall x\varphi$

b. Si $\models \varphi$ entonces $\models \forall x\varphi$ y $\models \exists x\varphi$

c. $\not\models \exists x\varphi \to \forall x\varphi$

d. $\not\models \exists x\varphi \wedge \exists x\psi \to \exists x(\varphi \wedge \psi)$

Ejercicio 13

Sean φ, ψ fórmulas de un lenguaje de primer orden. Puede suponer, sin pérdida de generalidad que $\mathrm{FV}(\varphi) = \mathrm{FV}(\psi) = \{x\}$. Demuestre que:

a. $\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$

b. $\models (\exists x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$

c. $\models \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi)$

d. $\models (\forall x\varphi \to \exists x\psi) \to \exists x(\varphi \to \psi)$

e. $\models (\exists x\varphi \to \forall x\psi) \to \forall x(\varphi \to \psi)$

Ejercicio 14

Sea L un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle -; 1; 1\rangle$, con símbolo de función f y símbolo de constante c_1.

a. Dé M tal que $M \models f(x) =' c_1$. Justifique su respuesta.

b. Sea $\varphi := f(x) =' c_1 \wedge (\exists y)(f(y) =' x)$
   I. Encontrar M_1 tal que $M_1 \models \varphi$. Justifique su respuesta.
   II. Demostrar que $\not\models \varphi$.
   III. Determine si existe M_2 tal que $M_2 \models \neg\varphi$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 15

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle -; 2; 1\rangle$ con símbolo de función f (binario) y símbolo de constante c.

Decimos que una estructura M del tipo $\langle -; 2; 1\rangle$ es un *grupo* ssi $M \models \Gamma$, donde Γ es el conjunto formado por las sigientes fórmulas:

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1 := \forall x((f(x,c) =' x) \wedge (f(c,x) =' x)) & \text{(existencia de neutro)} \\
\varphi_2 := \forall x \exists y((f(x,y) =' c) \wedge (f(y,x) =' c)) & \text{(existencia de inverso)} \\
\varphi_2 := \forall x \forall y \forall z(f(x, f(y,z)) =' f(f(x,y),z)) & \text{(propiedad asociativa)}
\end{array}$$

(*Nota*: $M \models \Gamma$ denota que: Para toda $\varphi \in \Gamma$ se cumple que $M \models \varphi$)

a. Indique cuáles de las siguientes estructuras son grupos. Justifique su respuesta.

$M_1 = \langle \mathbb{N}, +, 0\rangle$ donde $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los naturales y $+$ la suma.
$M_2 = \langle M_{2\times 2}(\mathbb{R}), *, I\rangle$ donde $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ denota el conjunto de matrices (2×2) reales con determinante $\neq 0$, $*$ el producto de matrices e I la matriz identidad.
$M_3 = \langle Z/_5, +, 0\rangle$ donde $Z/_5$ denota el conjunto de los enteros *mod* 5 y $+$ la suma *mod* 5.
$M_4 = \langle Z, -, 0\rangle$ donde Z denota el conjunto de los enteros y $-$ la resta.
$M_5 = \langle \{0,1,2\}, \Diamond, 0\rangle$ donde $\Diamond$ es un operador binario dado por la siguiente tabla:

$\Diamond$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	0
2	2	0	0

b. Si además se cumple que $M \models \Gamma \cup \{\varphi_4\}$ siendo φ_4 la siguiente fórmula

$$\varphi_4 = \forall x \forall y(f(x,y) =' f(y,x)) \text{ (propiedad conmutativa)}$$

decimos entonces que M es *grupo abeliano*. Indique cuáles de los grupos determinados en la parte anterior son abelianos.

Ejercicio 16

Muestre que la condición sobre z en el teorema 2.5.4 (cambio de variables ligadas) es necesaria.

Ejercicio 17

Considere una función $g : P \to \text{FORM}$ que a cada letra proposicional le asigna una fórmula, y la siguiente función que transforma proposiciones en fórmulas:

$$\begin{array}{l}
f : PROP \to FORM \\
f(p_i) = g(p_i) \\
f(\bot) = \bot \\
f(\alpha \Diamond \beta) = f(\alpha) \Diamond f(\beta), \ \Diamond \in \{\to, \leftrightarrow, \wedge, \vee\} \\
f(\neg\alpha) = \neg f(\alpha)
\end{array}$$

a. Suponga que g sólo devuelve fórmulas cerradas.
Pruebe que para una estructura M arbitraria de tipo adecuado, existe una valuación v tal que para toda $\varphi \in PROP$ se cumple que: $v(\varphi) = v^M(f(\varphi))$.

b. Sea M una estructura arbitraria de tipo adecuado, y $a_1, ..., a_m$ una m-upla de elementos de $|M|$. Pruebe que existe una valuación v tal que para toda $\varphi \in PROP$, siendo $\mathrm{FV}(f(\varphi)) \subseteq \{x_1, ..., x_m\}$, se cumple que $v(\varphi) = v^M(f(\varphi)[\bar{a_1},...,\bar{a_m}/x_1,...,x_m])$.

c. Pruebe que para toda $\varphi \in PROP$, si $\models \varphi$ entonces $\models f(\varphi)$.

Ejercicio 18

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1, 1, 2; 1; 0 \rangle$, con símbolos de relación P_1, P_2, P_3 y símbolo de función f_1.

a. Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, Par, Impar, \leq, F \rangle$ la estructura de los naturales con las relaciones "ser par", "ser impar", "menor o igual".

Proporcione sentencias φ_1 y φ_2 que formalicen las siguientes nociones:

i. F es decreciente.
ii. F aplicada a impares devuelve pares, y recíprocamente, aplicada a pares devuelve impares.

Demuestre que las interpretaciones de φ_1 y φ_2 en $\mathcal{N}$ se corresponden con las nociones anteriores.

b. Muestre que $\mathcal{N} \not\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$, siendo $\mathcal{N}$ la misma estructura de la parte anterior.

c. Encuentre una estructura $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$.

Ejercicio 19

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; 1; 0 \rangle$ y las siguentes fórmulas

- $\varphi_1 := P(f(x)) \wedge (\exists y) \neg P(y)$.
- $\varphi_2 := (\exists x)(\forall y) x =' y \rightarrow (\forall x) x =' f(x)$.

a. Para cada caso propocione una estructura M_i en caso que exista. Justifique su respuesta.

i. $M_1 \models \varphi_1$.
ii. $M_2 \models \varphi_2$.
iii. $M_3 \not\models \varphi_2$.

b. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones.

i. $\models (\forall x)(P(f(x) \wedge (\exists y) \neg P(y)) \vee ((\exists x)(\forall y) x =' y \rightarrow (\forall x) x =' f(x))$.
ii. $\exists \psi \in \mathrm{SENT}$ tal que ψ no es subfórmula de φ_1, φ_1 no es subfórmula de ψ y $\psi \models \varphi_1$.