

Práctico 5 - Derivación, primera parte

En este práctico se aceptarán como regla las siguientes derivadas

$$(e^x)' = e^x, \quad (\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x) \quad (1)$$

1. Derivación

1. Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones

$$a) f(x) = x^n \quad b) f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad c) f(x) = \frac{1}{x^n} \quad d) f(x) = \sqrt{x}$$

2. Sea $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto tal que f y g son derivables en I

- Probar que la función $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ es derivable y $h'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Probar que la función $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable y $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$
- Probar que si $f(x) \neq 0 \forall x \in I$ entonces la función $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ es derivable y $h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)^2}$
- Suponga que $f(I) \subset I$. Probar que la función $h(x) = g \circ f(x)$ es derivable y que $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$
- 1) Probar que si f es invertible, $f(p) = q$ y $f'(p) \neq 0$, entonces la función $h = f^{-1}$ es invertible y además $h'(q) = \frac{1}{f'(p)}$
2) De un ejemplo de una función f invertible y derivable pero que su inversa no sea derivable.
- Sea $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ función cualquiera. Probar que si en a existen las derivadas laterales, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$

entonces h es continua en a .

Probar que si las derivadas laterales son iguales entonces h es derivable en a

- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+2h) - f(x_0)}{h}$.
1) Probar o refutar, a partir de la definición, que f es derivable en x_0 .
2) Suponiendo que f es derivable en x_0 , ¿qué relación hay entre L y $f'(x_0)$?
 - Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existe $K = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0-h)}{h}$.
1) Probar o refutar, a partir de la definición, que g es derivable en x_0 .
2) Suponiendo que g es derivable en x_0 , ¿qué relación hay entre K y $g'(x_0)$?
- Sean las siguientes funciones de reales (en su máximo dominio):

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{x^2 + 5}{3x + 1}, \quad h(x) = e^x.$$

Calcule las derivadas de las siguientes funciones: $g, fg, fh, gh, g \circ f, h \circ g, f \circ g, f \circ h$.

5. Si f y g son funciones derivables en todo su dominio, halle las siguientes derivadas en función de las derivadas de f y g :

$$a) f(g(x)+x) \quad b) \frac{f(x)}{g^2(x)+1} \quad c) \sqrt{(f(x))^2+(g(x))^2} \quad d) (f(x))^{g(x)}$$

6. Determinar $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para que la función f sea derivable

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 0 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

7. Probar que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

es derivable solo en 0

8. a) Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a) \sin(x)\cos(x) \quad b) x \log(x) - x \quad c) \tan(x)$$

- b) Probar las siguientes igualdades de funciones trigonométricas

$$a) (\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2} \quad b) (\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad c) (\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

9. Calcular las derivadas, cuando existan, de las siguientes funciones

$$a) \sin(x+x^2) \quad b) \frac{x}{1-|x|} \quad c) \left(\frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}\right)^2 \quad d) \cos(x \sin(x)) + \sin(\cos(x^2))$$

$$e) \sin\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin(x)}\right)}\right) \quad f) \sin\left(\frac{x}{x-\left(\frac{x}{x-\sin(x)}\right)}\right) \quad g) (x^2-x+2)^{100} \quad h) \log(x^2+x+2)$$

$$i) \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right) \quad j) \sin(|x|) \quad k) \cos(|x|) \quad l) \log\left(\sqrt{\frac{\sin(x)+2}{x^2+2}}\right) \quad m) \log(|\tan(x)|)$$

10. Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^\alpha} \quad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(x)}{(x-1)^\alpha} \quad c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(x)}$$

discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$

11. Calcular las sucesiones $a_n = f^{(n)}(0)$, es decir, la sucesión de las derivadas enésimas, para las siguientes funciones

$$a) f(x) = e^x \quad b) f(x) = x^k \quad c) f(x) = \cos(x) \quad d) f(x) = \sin(x) \quad e) f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f) f(x) = \sqrt{x+1} \quad g) f(x) = \log(x+1)$$

12. Determinar hasta que orden es derivable en 0 la siguiente función, a partir de los parámetros n y k .

$$g_{(n,k)}(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x^k}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

13. Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que φ tiene derivadas de todos los órdenes y que $\varphi^{(m)}(1) = 0$

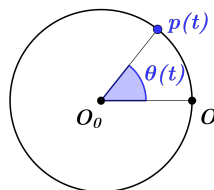
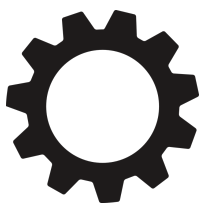
2. Modelos

1. Si un gas en un cilindro se mantiene a temperatura constante T , la presión P se relaciona con el volumen V mediante la fórmula $P = \frac{nRT}{V - nb} + \frac{an^2}{V^2}$ donde a, b, n, R son constantes.

Calcule $\frac{dP}{dV}$

2. En este ejercicio se intentará definir la velocidad de los engranajes. Para un engranaje lo importante es cuánto gira, y no la velocidad puntal en cada lugar del mismo.

Suponga por ejemplo que el engranaje de la figura (izquierda) gira a una velocidad constante, y que el engranaje tarda 12 segundos en dar una vuelta entera. ¿Cuánto tarda un diente para avanzar al siguiente lugar?



Para definir la velocidad de un engranaje se marcan 2 puntos, O_0 , el origen de la circunferencia, otro auxiliar O que servirá para medir los ángulos. Estos dos puntos están en el plano y se mantendrán siempre en el mismo lugar. Se pinta un punto p en el engranaje (la circunferencia), este si se moverá en función del tiempo, luego define una función $p(t)$. Por último, definimos la función θ como $\theta(t)$ es el ángulo que forman $O, O_0, p(t)$.

Definimos así la velocidad del engranaje como θ'

Para la siguiente figura numeramos los engranajes de forma descendente y llamamos θ_i a una función de ángulo para el engranaje i . Suponga que movemos voluntariamente el engranaje 1. Determinar las velocidades θ'_i en relación a θ'_1

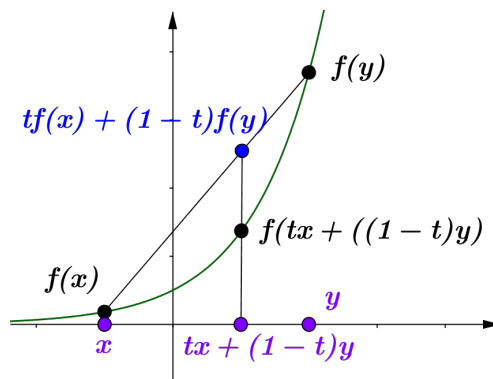


Suponga ahora un engranaje mueve una cinta horizontal. Relacionar la velocidad del engranaje con al de la cinta, cuidado no solo depende de θ' .

3. Ejercicios complementarios

1. Funciones convexas.

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función, donde I es un intervalo o \mathbb{R} , decimos que f es convexa si $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]$ se cumple que $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$. En otras palabras, dados dos puntos del grafico de f si se traza el segmento de recta por ellos, el gráfico de f nunca esta por arriba del él



En este ejercicio $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sera convexa

- Sea J el intervalo definido por $J = \{y : -y \in I\}$, probar que la funcion $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(y) = f(-y)$ es convexa
- Probar que en el caso de que f sea monótona creciente en I , dado $a \in I$ la función

$$g_a(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x \leq a \\ f(x) & \text{si } x > a \end{cases}$$

es convexa

- Probar que f es continua

d) Probar que existen las derivadas laterales, esto es,

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

e) Dar ejemplos de funciones convexas monótonas y no monótonas

f) Sea $J \subset I$ un intervalo cerrado, como f es continua tiene máximo en J , probar que el máximo de J se da en uno de los extremos de J .

2. Si f es tres veces derivable y $f'(x) \neq 0$ se define la derivada de Schwarz de f como

$$\mathcal{D}f = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)$$

a) Demostrar que $\mathcal{D}(f \circ g)(x) = \mathcal{D}f(g(x))(g'(x))^2 + \mathcal{D}g(x)$

b) Demostrar que si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ tal que $ad - bc \neq 0$ entonces $\mathcal{D}f = 0$. En consecuencia $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$

3. a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función impar, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.

En caso de ser derivable en 0 , ¿se puede afirmar algo de $f'(0)$?

b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función par, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.

En caso de ser derivable en 0 , ¿se puede afirmar algo de $f'(0)$?