

La Distribución Wigner

Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

¹Facultad de Ingeniería Universidad de la República

September 7, 2021

- 1 Variantes de la Distribución Wigner
 - Distribución “Smoothed Pseudo” Wigner
 - Distribuciones Suavizadas
 - Conclusiones

Contenido

- 1 Variantes de la Distribución Wigner
 - Distribución “Smoothed Pseudo” Wigner
 - Distribuciones Suavizadas
 - Conclusiones

Distribución “Smoothed Pseudo” Wigner

Multiplicando el producto bilineal por una función con un pico cercano a $\tau = 0$, $h(\tau)$, se obtiene la distribución *pseudo* Wigner

$$W_P(t, \omega) = \int h(\tau) s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Distribución “Smoothed Pseudo” Wigner

Multiplicando el producto bilineal por una función con un pico cercano a $\tau = 0$, $h(\tau)$, se obtiene la distribución *pseudo* Wigner

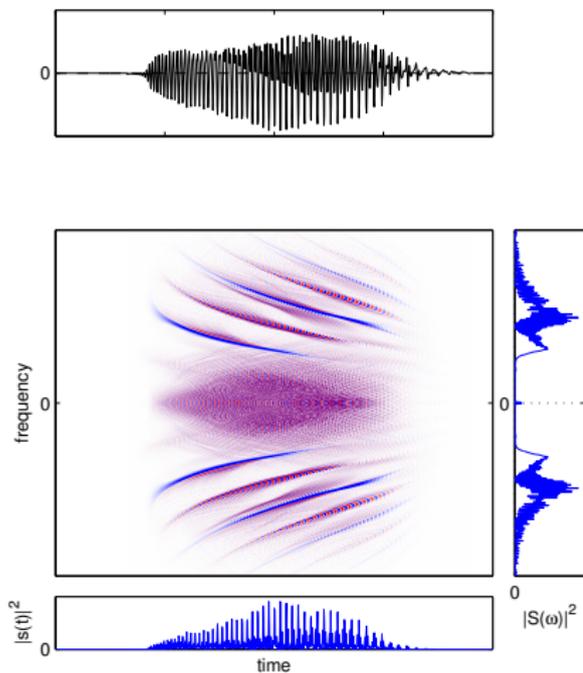
$$W_P(t, \omega) = \int h(\tau) s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Y al suavizar simultáneamente en el dominio de la frecuencia se obtiene la distribución *smoothed* pseudo Wigner

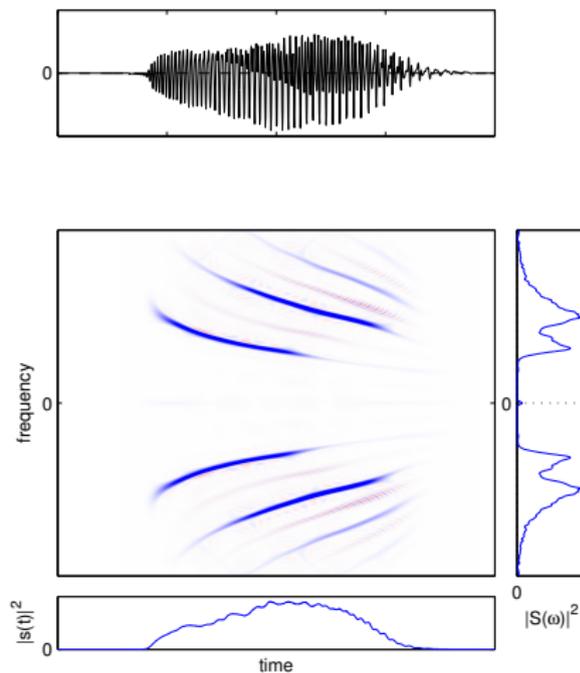
$$W_P(t, \omega) = \int h(\tau) \int g(t - u) s^*(u - \frac{1}{2}\tau) s(u + \frac{1}{2}\tau) du e^{-j\omega\tau} d\tau$$

Ejemplos

Distribución Wigner

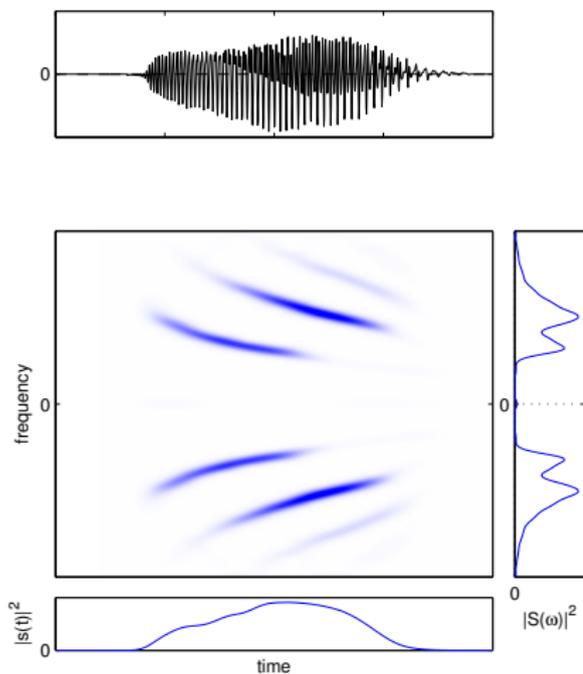


Smoothed Pseudo WD

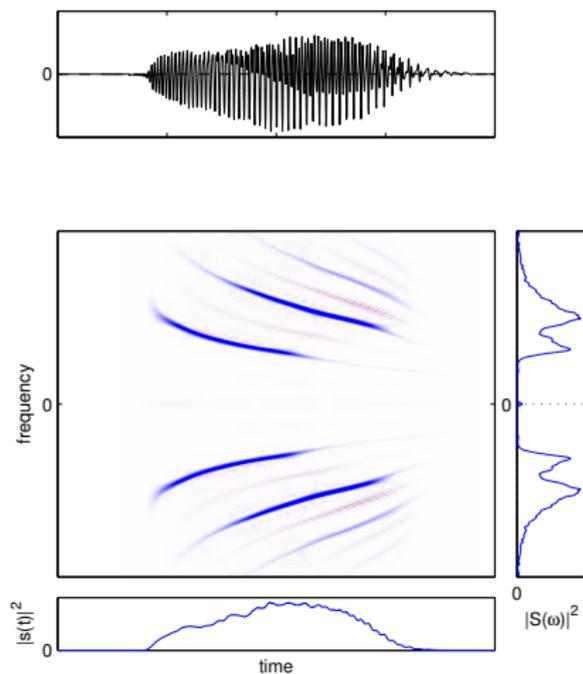


Ejemplos

Espectrograma



Smoothed Pseudo WD



Propiedades de la SPWD

- La distribución pseudo Wigner elimina, hasta cierto punto, los términos cruzados para señales multicomponentes.
- Como contrapartida, destruye varias de las propiedades ventajosas de la distribución de Wigner.
- Por ejemplo, no se sigue cumpliendo las propiedades marginales y frecuencias instantáneas.
- Para una ventana dada $h(t)$, la distribución smoothed pseudo Wigner mejora en muchos aspectos al espectrograma.
- La SPWD es computacionalmente más costosa que el espectrograma.

Contenido

- 1 Variantes de la Distribución Wigner
 - Distribución “Smoothed Pseudo” Wigner
 - Distribuciones Suavizadas
 - Conclusiones

Distribución Wigner Modificada y su Positividad

Una forma de obtener una distribución siempre positiva es intentar suavizar la distribución de Wigner con una función de suavizado $L(t, \omega)$

$$W_{\text{SM}}(t, \omega) = \iint L(t - u, \omega - \theta) W(u, \theta) du d\theta$$

Una opción clásica es la Gaussiana

$$L(t, \omega) = e^{-t^2/\alpha} e^{-\omega^2/\beta}$$

Distribución Wigner Modificada y su Positividad

Una forma de obtener una distribución siempre positiva es intentar suavizar la distribución de Wigner con una función de suavizado $L(t, \omega)$

$$W_{SM}(t, \omega) = \iint L(t - u, \omega - \theta) W(u, \theta) du d\theta$$

Una opción clásica es la Gaussiana

$$L(t, \omega) = e^{-t^2/\alpha} e^{-\omega^2/\beta}$$

- Si $\alpha\beta \geq 1$, entonces $W_{SM}(t, \omega) \geq 0$.
- Si $\alpha\beta = 1$, entonces $W_{SM}(t, \omega)$ se vuelve el espectrograma!

Distribución Wigner Modificada y su Positividad

Una forma de obtener una distribución siempre positiva es intentar suavizar la distribución de Wigner con una función de suavizado $L(t, \omega)$

$$W_{SM}(t, \omega) = \iint L(t - u, \omega - \theta) W(u, \theta) du d\theta$$

Una opción clásica es la Gaussiana

$$L(t, \omega) = e^{-t^2/\alpha} e^{-\omega^2/\beta}$$

- Si $\alpha\beta \geq 1$, entonces $W_{SM}(t, \omega) \geq 0$.
- Si $\alpha\beta = 1$, entonces $W_{SM}(t, \omega)$ se vuelve el espectrograma!

La distribución suavizada no cumple los marginales y los promedios locales.

Contenido

- 1 Variantes de la Distribución Wigner
 - Distribución “Smoothed Pseudo” Wigner
 - Distribuciones Suavizadas
 - Conclusiones

Distribución Wigner vs. Espectrograma

- La distribución Wigner brinda una imagen clara de la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.

Distribución Wigner vs. Espectrograma

- La distribución Wigner brinda una imagen clara de la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- De hecho, los promedios locales son la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.

Distribución Wigner vs. Espectrograma

- La distribución Wigner brinda una imagen clara de la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- De hecho, los promedios locales son la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- Una ventaja del espectrograma es que es siempre positivo, mientras que la distribución Wigner es (salvo excepciones) no se mantiene sólo positiva.

Distribución Wigner vs. Espectrograma

- La distribución Wigner brinda una imagen clara de la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- De hecho, los promedios locales son la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- Una ventaja del espectrograma es que es siempre positivo, mientras que la distribución Wigner es (salvo excepciones) no se mantiene sólo positiva.
- Para señales multicomponente, la distribución Wigner obtiene espúreos, localizados en frecuencias intermedias de las componentes presentes.

Distribución Wigner vs. Espectrograma

- La distribución Wigner brinda una imagen clara de la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- De hecho, los promedios locales son la frecuencia instantánea y el retardo de grupo.
- Una ventaja del espectrograma es que es siempre positivo, mientras que la distribución Wigner es (salvo excepciones) no se mantiene sólo positiva.
- Para señales multicomponente, la distribución Wigner obtiene espúreos, localizados en frecuencias intermedias de las componentes presentes.
- La distribución de Wigner satisface los marginales. El espectrograma no.