Práctico 4 - Límites y continuidad

1. Límites

1. Encontrar un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ para todo x que cumple $0 < |x - a| < \delta$.

   a) $f(x) = x^4$, $l = a^4$ *b*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $l = 1$ *c*) $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$, $a = 1$, $l = 2$

2. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto y $p \in I$ tal que $\lim\limits_{x\to p} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x\to p} g(x) = b$.

   a) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la $\lim\limits_{x\to p} f(x) + \lambda = a + \lambda$

   b) Probar que la función $h(x) = f(x) + g(x)$ tiene límite en p y $\lim\limits_{x\to p} h(x) = a + b$

   c) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la función $\tilde{f}(x) = \lambda f(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to p} \tilde{f}(x) = \lambda a$

   d) Probar que la función $h(x) = f(x)g(x)$ verifica que $\lim\limits_{x\to p} h(x) = ab$

   e) Probar que si $g(x), b \neq 0$ entonces la función $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ cumple que $\lim\limits_{x\to p} h(x) = \dfrac{a}{b}$

   f) Supongamos que $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Sea $h(x)$ una función real, probar que existe el $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)}$ si solo si existe el límite $\lim_{x\to p} \frac{h(x)}{f(x)}$, mas aun $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to p} \dfrac{h(x)}{f(x)}$

   g) Sea $h(x)$ una función acotada y suponga que $a = 0$, probar que la función $r(x) = f(x)h(x)$ cumple que $\lim_{x\to a} r(x) = 0$

   h) Suponga que $a = b$ y que $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$. Probar que si $h(x)$ verifica $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ entonces $\lim\limits_{x\to p} h(x) = a$

   i) Suponga que $a = p$ y sea $h(x) = g(f(x))$ probar o dar un contraejemplo de la afirmación, existe el límite de h en p y $\lim_{x\to p} h(x) = b$

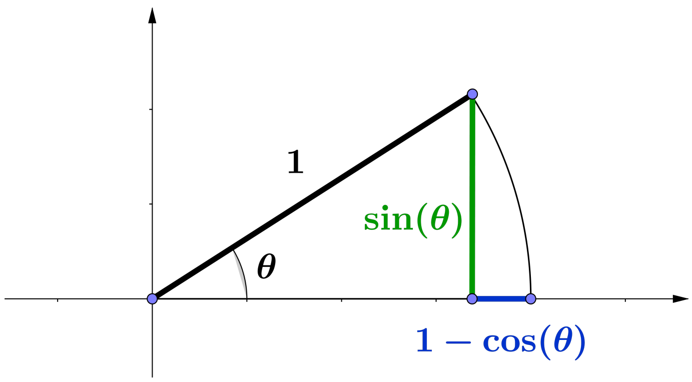
3. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2} e^x + 5x^2$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ *c*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ *d*) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$

   e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ *f*) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 2}{x^2 + 4}$ *g*) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) + \cos(x)$

   h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2 + 1}$ *i*) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - \sqrt{x^2 + x}$ *j*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)^2}{x}$

4. En este ejercicio se calcularán algunos límites trigonométricos a partir de propiedades geométricas.



a) Probar que $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$

b) Verificar geométricamente que para $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ se tiene que $\sin(\theta) \leq \theta$

c) Deducir que en caso de existir $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$

d) Probar que para $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, el arco de circunferencia de ángulos entre 0 y θ esta contenido en rectangulo de vertices opuestos $(1,0)$ y $(\cos(\theta), \sin(\theta))$. Justificar geometricamente que para $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, se tiene la desigualdad $\theta \leq \sin(x) + (1-\cos(\theta))$.

e) Usando que para $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ se tienen las desigualdades $\theta \leq \theta \leq \sin(x) + (1-\cos(\theta))$, probar que $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

f) Deducir que $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}$

5. Calcular los siguientes límites:

$$a) \quad \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad b) \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$$

Calcular, discutiendo según $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, el siguiente límite:

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty} x^a e^{-x}$$

2. Continuidad

1. Sean a,b,c y d numeros reales tales que $a < b$ y $c < d$. Bosquejar, si es posible, funciones que cumplan.

a) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d)$

b) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = [c,d]$

c) $f : (a,b) \to [c,d]$, $f((a,b)) = (c,d]$

d) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = (c,d)$

e) $f : [a,b] \to [c,d]$, $f([a,b]) = [c,d]$

2. Determinar en qué puntos son continuas las siguientes funciones:

a) $f(x) = [x]$ ($[x]$ es la parte entera de x).

b) $f(x) = [1/x]$.

c) $f(x) = \sqrt{x - [x]}$.

d) $f(x) =$ el primer número del desarrollo decimal de x.

e) $f(x) =$ el número de sietes del desarrollo decimal de x si este número es finito y cero en el caso contrario.

3. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente función sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si} \quad x < 1 \\ ax + b & \text{si} \quad 1 \le x \le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

4. Bosquejar las funciones $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definidas por

   - $f_1(x) = \sin(\frac{1}{x})$
   - $f_2(x) = x \sin(\frac{1}{x})$
   - $f_3(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$

   Determinar si se pueden extender continuamente a 0, esto es definir $f_i(0)$ de forma que f_i sea continua.

5. *a*) Sea $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función de Dirichlet, es decir:

$$D(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Probar que D es discontinua en todo punto.

   b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

   Estudiar la continuidad de g.

6. *a*) Sea f una función que satisface $|f(x)| \le |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en cero.

   b) Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún a distinto de cero.

   c) Sea g continua en cero, $g(0) = 0$ y $|f(x)| \le |g(x)|$. Demostrar que f es continua en cero.

7. Sean f y g funciones reales y sea $c \in \mathbb{R}$.

   a) Demostrar que si f es discontinua en c y g es continua en c entonces $f + g$ es discontinua en c. ¿Qué pasa si ambas funciones son discontinuas en c?

   b) ¿Qué se puede afirmar con respecto al producto de las funciones?

   c) Supongamos ahora que $f(x) = x^2$ y $g(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x \le 0 \\ |4 - x| & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Estudiar la continuidad en 0 de f, g , $f \circ g$ y $g \circ f$.

   (d) Definir f y g para que f sea discontinua en c, g sea discontinua en $f(c)$ y $g \circ f$ sea continua en c.

8. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Demostrar que f tiene algún punto fijo, es decir, que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.

9. Demostrar que existe algún número x tal que

   a) $x^{179} + \dfrac{163}{1 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} = 119$ *b*) $\operatorname{sen} x = x - 1$ *c*) $P(x) = 0 : P$ polinomio de grado impar

10. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente y $a \in \mathbb{R}$

   a) Probar que existen los límites $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y ademas $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \le \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

   b) Probar que los límites laterales son iguales si solo si f es continua en a.

   c) Deducir que si f no es continua en a entonces existe un intervalo abierto I_a tal que $Im(f) \cap I_a = \emptyset$

   d) Deducir que una función monótona sobreyectiva es continua.

3. Sucesiones por recurencia

1. Sea la sucesión definida por $a_1 = 3$ y la siguiente recurrencia: $a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}$ $\forall n \ge 1$.

   a) Demostrar que $a_n \ge 0$ y $a_n \ge \sqrt{3}$, $\forall n \ge 1$.

   b) Demostrar que $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n \ge 1$.

   c) Deducir que (a_n) tiene límite y calcularlo.

2. Sea la sucesión definida por $x_1 \ge 0$ y la siguiente recurrencia: $x_{n+1} = \sqrt{2x_n^2 + 1}$ $\forall$ $n \ge 1$.

   a) Estudiar monotonía de (x_n).

   b) Mostrar que la hipótesis de convergencia lleva a una contradicción.

   c) Calcular el límite de $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

3. Sea x_n la sucesion dada por $x_0 = 0$ y la recurrencia $x_{n+1} = \frac{6+x_n}{6-x_n}$

   a) Probar que $x_n \in [0, 2)$, $\forall n \ge 0$.

   b) Probar que x_n es monotona creciente

   c) Deducir que x_n es convergente y calcular su limite.

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Dado $a_0 \in \mathbb{R}$ definimos la sucesión por recurrencia $a_{n+1} = f(a_n)$. Decimos que x es un punto fijo de f si $f(x) = x$

   a) Decidir y justificar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones

      1) Si f esta acotada entonces a_n esta acotada

      2) Si f es monótona entonces a_n es monotona

   b) Propiedades básicas de estas sucesiones.

      1) Mostrar que la sucesión a_n es constante si solo si $f(a_0) = a_0$.

      2) Probar que si converge y $\lim_{n \to +\infty} a_n = l$ entonces $f(l) = l$. Deducir que si f no tiene puntos fijos entonces a_n no converge.

   c) Una manera de explicitar la sucesión es a través del siguiente procedimiento geométrico.

      - Graficar f y la recta $y = x$
      - Marcar $(a_0, 0)$ en el eje Ox y trazar r_0 una recta vertical por él
      - Marcar el punto de corte de r_0 con el grafico f, notemos p_0, y trazar una recta horizontal por p_0, digamos s_0
      - Marcar el punto de corte de la recta s_0 con la recta $x = y$, notemos p_0'. El punto p_0' tiene como primera coordenada a_1. Por trazando la recta vertical por p_0' digamos r_0' e intersectándola con el eje Ox se obtiene el punto $(a_1, 0)$, y se puede repetir el procedimiento.

Explicar por qué este procedimiento funciona.

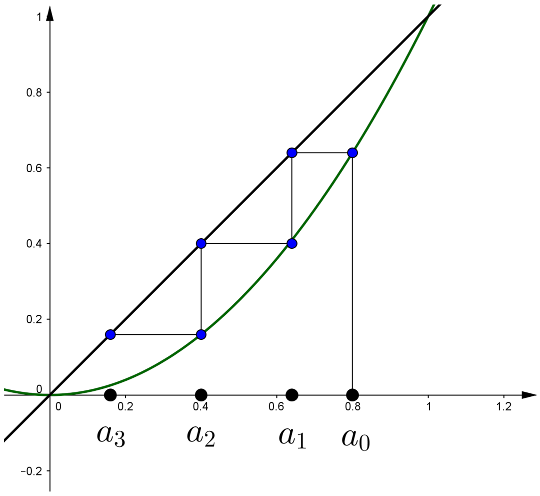


Figura 1: Ejemplos de sucesión de recurencia, $a_0 = 0{,}8, f(x) = x^2$

d) Sea p un punto fijo de f. Usaremos la notación f^n para la iteración de la función f n veces

- Se dice que p es atractor si $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall x \in (p-\epsilon, p+\epsilon)$ cumple que $\lim_{n\to+\infty} f^n(x) = p$.
- Se dice que p es repulsor si $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall x \in (p-\epsilon, p+\epsilon) \setminus \{p\}$ existe un m tal que $f^m(x) \notin (p-\epsilon, p+\epsilon)$

1) Explicar la definición de punto fijo atractor función de las sucesiones a_n.
2) Si tomamos $f(x) = mx$ donde $m \neq 0$, $m \neq 1$, el único punto fíjo de f es el 0. Discutir, en función de m, si es atractor, repulsor o ninguno de ellos.
3) Discutir sobre los puntos fijos de la función $f(x) = x^2$
4) Sea f una función tal que
   - $f(a) = a$, $f(b) = b$
   - $f(x) < x \ \ \forall x \in (a,b)$
   - $a < f(x) < b \ \ \forall x \in (a,b)$

   Determinar para una sucesión a_n tal que $a_0 \in (a,b)$ si converge y en caso de convergencia calcular el límite

4. Acotaciones y extremos

1. Para cada una de las siguientes funciones, decidir cuáles de ellas están acotadas superiormente o inferiormente en el intervalo indicado, y cuáles de ellas alcanzan sus valores máximo o mínimo. (Observar que f puede tener esas propiedades aún no siendo continua y aunque el intervalo no sea cerrado.)

   a) $f(x) = x^2$ en $(-1,1)$.

   b) $f(x) = x^3$ en $(-1,1)$.

   c) $f(x) = x^2$ en $\mathbb{R}$.

   d) $f(x) = x^2$ en $[0,+\infty)$.

   e) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$, en $(-a-1, a+1)$ (discutiendo según a).

   f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq a \\ a+2 & \text{si } x > a \end{cases}$, en $[-a-1, a+1]$.

g) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$, en $[0, a]$.

h) $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\cos x + \sqrt{1+a^2}\right)$ en $[0, a^3]$.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar o dar un contraejemplo para las siguientes afrimaciones

   a) Si f esta acotada si solo si tiene máximo y mínimo.

   b) Si f tiene máximo y mínimo entonces esta acotada

   c) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f esta acotada.

   d) Si f esta acotada entonces existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

   e) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   f) Si existen $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$, entonces f tiene máximo o mínimo.

   g) Si existe $a, \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo y mínimo.

   h) Si existe $a, \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a = \lim_{x\to-\infty} f(x)$, entonces f tiene máximo o mínimo.

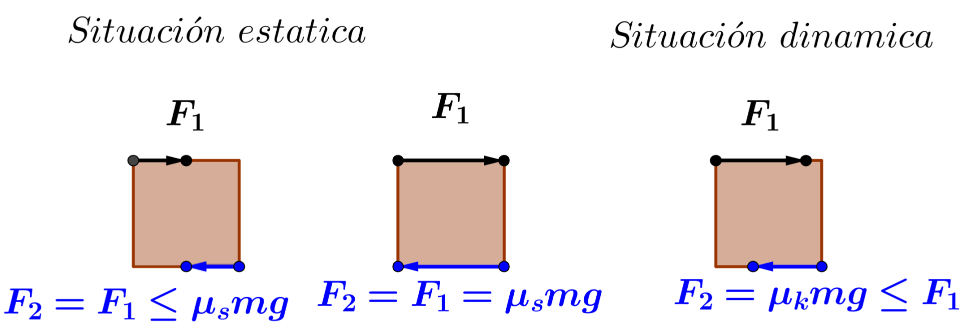
5. Modelos

1. Sea F la función que le asigna a cada punto del planeta Tierra su temperatura, asumamos que la tierra tiene forma esférica perfecta. Discutir si la siguiente afirmación es verdadera: Existen dos puntos antipodales (diametralmente opuestos en la esfera) que tienen la misma temperatura. Repetir el estudio para la función G altura al nivel del mar.

2. Tenemos una caja de madera de masa m apoyada en el suelo, tambien de madera, en reposo. Empezamos a aplicarle una fuerza, digamos $F_1(t) = tN$ (una cantidad de t Newton en el instante t). Al principio la caja no se movera, esto es debido a la fuerza de rozamiento que ejerce el suelo sobre la caja, contraresta la nuestra, obteniendo así que al fuerza neta sobre la caja sea 0. A la fuerza de friccion que el piso ejerce sobre la caja cuando esta esta en reposo se le llama fuerza de rozamiento estatica

   Cuando se sobrepasa un valor critico $\mu_s mg$ la caja empieza a moverse, y la fuerza de rozamiento pasa a ser dinámica $\mu_k mg$

   En este caso $\mu_s = 0{,}7$ y $\mu_k = 0{,}4$, estas constantes estan determinadas por el material de las superficies.



   a) Bosquejar la función $F_1(t)$, la fuerza que ejercemos sobre la caja, y determinar en qué puntos es continua.

   b) Bosquejar la función $F_2(t)$ la fuerza que ejerce el suelo sobre la caja. ¿En qué puntos F_2 es continua?

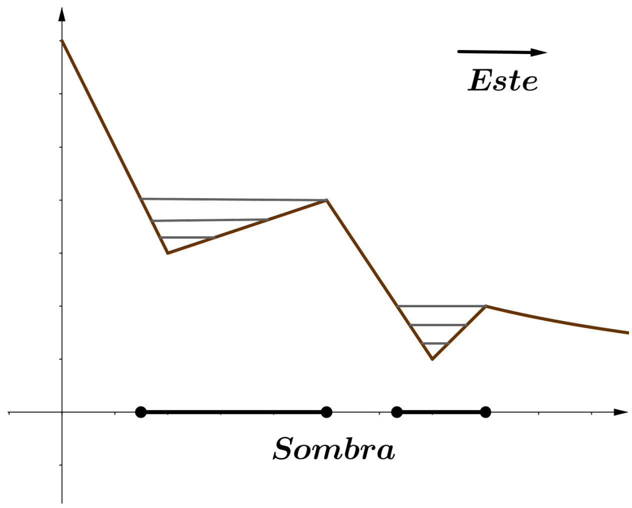
   c) Bosquejar $F(t)$ la fuerza resultante sobre la caja y determinar en qué puntos es continua.

d) Definimos la función $x(t)$ la función posicion de la caja en funcion del tiempo. Discutir sobre cómo podría ser el bosquejo del desplazamiento de la caja. ¿En qué puntos esta función seria continua?

3. Lema del Sol Naciente

   Suponga que tenemos una región montañosa como en la figura. Denominamos $f(x)$ a la altura de cada punto y donde la coordenada x crece hacia el este. Asuma que f es continua.

   En el momento del Alba, podemos suponer que los rayos de sol son horizontales, habrá lugares con sombra y lugares sin sombra. Llamamos $S = \{x : \text{ en el punto } (x, F(x) \text{ hay sombra}\}$



a) Discutir que $x \in S$ si solo si $\exists y > x$ tal que $F(x) < F(y)$. Esta es la definición formal de S.

b) Suponga que $(a,b) \subset S$ y $a \notin S$, $b \notin S$, en particular $f(a) \geq f(b)$.

   1) Suponga que $f(a) > f(b)$, demuestre que el máximo de f en $[a,b]$ es $f(a)$.
   2) Demuestre que esto lleva a una contradicción, por tanto $f(a) = f(b)$

c) Sea p tal que existe un intervalo I para el cual $p \in I$ que cumple la siguiente propiedad, $\forall x \in I \;\; x \in S$ si solo si $x < p$. Mostrar que $F(p)$ es un pico, es decir un máximo relativo.

4. Sea C un circuito con una fuente y un par de resistencias.

   Una leve explicación del circuito es la siguiente: La fuente FEM aporta voltaje V al circuito, lo cual hace que los electrones se desplacen a cierta velocidad; a esto se le llama intensidad I, mientras la resistencia dificulta el paso de los electrones.

   Visto de forma sencilla, más voltaje es más intensidad, y más resistencia es menos intensidad. La fórmula explícita de esta relación está dada por la ley de Ohm, esto es

$$V = IR$$

   Cuando se tiene un sistema de dos resistencias en serie, el circuito funciona como si tuviera una resistencia con valor $R = R_1 + R_2$, mientras que en el caso de tener dos resistencias en paralelo el circuito funciona como si tuviera una resistencia con valor R donde R cumple $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

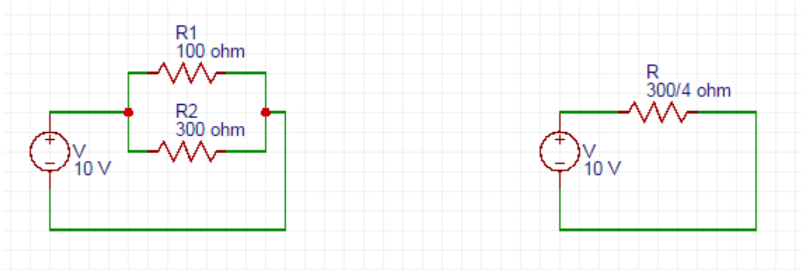


Figura 2: Estos circuitos son equivalentes

Estudiemos el caso de un circuito con dos resistencias en paralelo

a) Suponga que fijamos $R_2 = 300\Omega$ y $V = 10V$. Determinar la función F que asocia a cada R_1 el correspondiente R.

b) Calcular $\lim\limits_{R_1 \to 0^+} F(R_1)$ y $\lim\limits_{R_1 \to +\infty} F(R_1)$. Discutir sobre posibles interpretaciones físicas de estos resultados.

c) Bosquejar la función F

6. Ejercicios complementarios

1. Una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice Lipschitz si $\exists \lambda$ tal que $\forall x, y \in I, \mid f(x) - f(y) \mid \leq \lambda \mid x - y \mid$.

   a) Probar que si f es Lipschitz entonces es continua

   b) Dar un ejemplo de una función continua no Lipschitz

2. Explique qué esta mal en el siguiente razonamiento: Es claro que cuando $\lim_{x\to 0}(1+x) = 1$. Como $1^a = 1$ para todo $a \in R$ se tiene que
$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} 1^{\frac{1}{x}} = 1$$

3. Dar un ejemplo de función para la cual la siguiente proposición sea falsa: si $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon/2$ cuando $0 < |x - a| < \delta/2$.

4. *a*) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto finito F que verifica que $|f(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in (a, b) - F$. Probar que f es continua en $c \in (a, b)$ si y solo si $f(c) = 0$.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ con mcd}\{p, q\} = 1 \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$
   Usar la parte anterior para probar que f es discontinua en cada racional y continua en cada irracional. La función f se llama *función de Riemann*.

5. Sea $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la función compleja dada por $f(z) = z^2 + c$. podemos definir en función de c la sucesión de recurencia $a_0(c) = 0$, $a_{n+1}(c) = f_c(a_n(c))$.

   Definimos ahora el conjunto de Mandelbrot como $M = \{c : a_n(c) \text{ esta acotada }\}$.

   a) Verificar que $0 \in M$, $-1 \in M$ y $1 \notin M$

   b) Probar que para todo $c \in \mathbb{C}$ tal que $\mid c \mid \geq 2$ se tiene que $c \notin M$

   c) Deducir que $c \notin M$ si solo si $\exists m$ tal que $\mid f^m(c) \mid \geq 2$. Esto último nos da un procedimiento inductivo para bosquejar el conjunto M.

Figura 3: Se pintan en negro los puntos que en algún iterado anterior están a mas de 2 de distancia de 0