Herramientas de representación tiempo–frecuencia

Clase 2

IIE

[1]Facultad de Ingeniería Universidad de la República

September 21, 2023

Contenido

Contenido

La Señal Compleja

La naturaleza de las señales es real, pero es ventajoso definir una señal compleja $z(t)$ como herramienta para estudiar $s(t)$

$$z(t) = s_r(t) + js_i(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

donde s_r corresponde a la "señal real" y s_i se elige a los efectos del análisis.

La amplitud y fase se definen como

$$A(t) = \sqrt{s_r^2 + s_i^2} \quad ; \quad \varphi(t) = \arctan s_r/s_i$$

obteniendo

$$\omega_i(t) = \varphi'(t) = (s_i' s_r - s_r' s_i)/A^2$$

Cómo se define la parte imaginaria $s_i(t)$?

La Señal Compleja

La naturaleza de las señales es real, pero es ventajoso definir una señal compleja $z(t)$ como herramienta para estudiar $s(t)$

$$z(t) = s_r(t) + js_i(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

donde s_r corresponde a la “señal real” y s_i se elige a los efectos del análisis.

La amplitud y fase se definen como

$$A(t) = \sqrt{s_r^2 + s_i^2} \quad ; \quad \varphi(t) = \arctan s_r/s_i$$

obteniendo

$$\omega_i(t) = \varphi'(t) = (s_i' s_r - s_r' s_i)/A^2$$

Cómo se define la parte imaginaria $s_i(t)$?

La Señal Compleja

La naturaleza de las señales es real, pero es ventajoso definir una señal compleja $z(t)$ como herramienta para estudiar $s(t)$

$$z(t) = s_r(t) + js_i(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

donde s_r corresponde a la "señal real" y s_i se elige a los efectos del análisis.

La amplitud y fase se definen como

$$A(t) = \sqrt{s_r^2 + s_i^2} \quad ; \quad \varphi(t) = \arctan s_r/s_i$$

obteniendo

$$\omega_i(t) = \varphi'(t) = (s_i' s_r - s_r' s_i)/A^2$$

Cómo se define la parte imaginaria $s_i(t)$?

La Señal Compleja

La naturaleza de las señales es real, pero es ventajoso definir una señal compleja $z(t)$ como herramienta para estudiar $s(t)$

$$z(t) = s_r(t) + js_i(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

donde s_r corresponde a la "señal real" y s_i se elige a los efectos del análisis.

La amplitud y fase se definen como

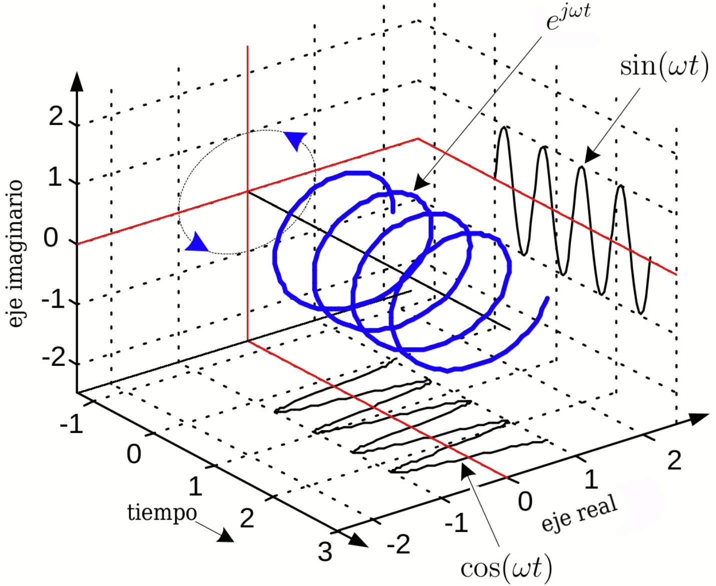
$$A(t) = \sqrt{s_r^2 + s_i^2} \quad ; \quad \varphi(t) = \arctan s_r/s_i$$

obteniendo

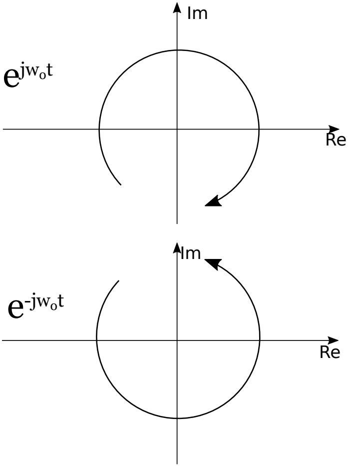
$$\omega_i(t) = \varphi'(t) = (s_i' s_r - s_r' s_i)/A^2$$

Cómo se define la parte imaginaria $s_i(t)$?

Una Exponencial Compleja



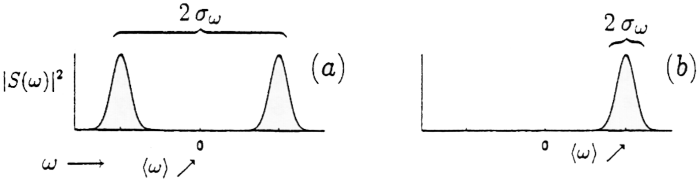
¿Qué son las frecuencias positivas y negativas?



Motivos Para Definir la Señal Compleja

En una señal real, debido a la simetría de $|S(\omega)|^2$, la frecuencia promedio será siempre cero.

Y el cálculo del Ancho de Banda será en realidad la frecuencia promedio.



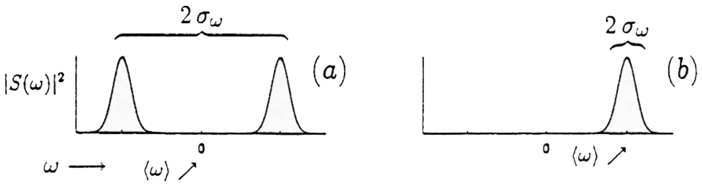
Podemos resolver este problema con la frecuencia promedio definida como

$$\langle \omega \rangle = \int_0^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 d\omega = \int z^*(t) \frac{1}{j} \frac{d}{dt} z(t) dt \,, \qquad [\, z(t) = ? \,]$$

Motivos Para Definir la Señal Compleja

En una señal real, debido a la simetría de $|S(\omega)|^2$, la frecuencia promedio será siempre cero.

Y el cálculo del Ancho de Banda será en realidad la frecuencia promedio.



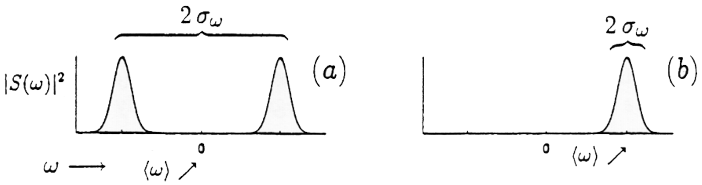
Podemos resolver este problema con la frecuencia promedio definida como

$$\langle\omega\rangle = \int_0^\infty \omega|S(\omega)|^2 d\omega = \int z^*(t)\frac{1}{j}\frac{d}{dt}z(t)dt\,, \qquad [\ z(t) = ?\ ]$$

Motivos Para Definir la Señal Compleja

En una señal real, debido a la simetría de $|S(\omega)|^2$, la frecuencia promedio será siempre cero.

Y el cálculo del Ancho de Banda será en realidad la frecuencia promedio.



Podemos resolver este problema con la frecuencia promedio definida como

$$\langle\omega\rangle = \int_0^\infty \omega |S(\omega)|^2 d\omega = \int z^*(t)\frac{1}{j}\frac{d}{dt}z(t)dt\,, \qquad [\ z(t) =?\ ]$$

Contenido

La Señal Analítica

Introducida por Gabor en 1947, la señal analítica $z(t) = \mathcal{A}[s(t)]$ se define como

$$z(t) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Simplificando

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

donde $\hat{s}(t)$ es la transformada Hilbert de la señal $s(t)$

$$H[s(t)] = \hat{s}(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

La energía de la señal analítica es igual a $2E$.

La Señal Analítica

Introducida por Gabor en 1947, la señal analítica $z(t) = \mathcal{A}[s(t)]$ se define como

$$z(t) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Simplificando

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

donde $\hat{s}(t)$ es la transformada Hilbert de la señal $s(t)$

$$H[s(t)] = \hat{s}(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

La energía de la señal analítica es igual a $2E$.

La Señal Analítica

Introducida por Gabor en 1947, la señal analítica $z(t) = \mathcal{A}[s(t)]$ se define como

$$z(t) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Simplificando

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

donde $\hat{s}(t)$ es la transformada Hilbert de la señal $s(t)$

$$H[s(t)] = \hat{s}(t) = \frac{1}{\pi}\int \frac{s(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

La energía de la señal analítica es igual a $2E$.

Cálculo de la Señal Analítica

Algunas operaciones y la relación con la señal analítica:

- La señal analítica de una señal analítica
- La señal analítica de la derivada
- Convolución
- Modulación de la señal
- Señal analítica de la suma de dos señales
- Teorema de factorización
- Producto de dos señales analíticas
- Señales reales

Cálculo de la Señal Analítica

La señal analítica de una señal analítica

$$\mathcal{A}[z(t)] = 2z(t) \text{ , si } z(t) \text{ es anallítica}$$

La señal analítica de la derivada

$$\mathcal{A}\left[\frac{d^n s}{dt^n}\right] = \frac{d^n}{dt^n}\mathcal{A}[s]$$

Cálculo de la Señal Analítica

Convolución

$$z(t) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty F(w)S(w)e^{jwt}dw$$

entonces

$$\int \mathcal{A}[s(t')]f(t-t')dt' \text{ , es analítica para } s \text{ y } f \text{ arbitrarios}$$

Modulación de la señal

$$s_{new}(t) = s(t)e^{jw_0t}$$

$$S_{new}(w) = S(w - w_0)$$

$s(t)e^{jw_0t}$ es analítica si el espectro de s(t) es cero para $w \leq -w_0$

Cálculo de la Señal Analítica - Ejemplo

Cálculo de la señal analítica de $cos(\omega t)$

$$\mathcal{A}\left[cos(\omega t)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{A}\left[e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right]$$

$$\mathcal{A}\left[cos(\omega t)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{A}\left[e^{j\omega t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{A}\left[e^{-j\omega t}\right]$$

$$\mathcal{A}\left[cos(\omega t)\right] = \frac{1}{2}\mathcal{A}\left[e^{j\omega t}\right] = e^{j\omega t}$$

Cálculo de la Señal Analítica

Señal analítica de la suma de dos señales

$$s = s_1 + s_2$$

es analítica si $S_1(w) = -S_2(w)$ para $w \leq 0$.

Cálculo de la Señal Analítica - Factorización

Teorema de factorización

$$\mathcal{A}[s_1 s_2] = s_1 \mathcal{A}[s_2]$$

si el espectro de s_1 es nulo para frecuencias menores a $-w_1$ y s_2 es cualquier señal que su función analítica que es cero debajo de w_1

Producto de dos señales analíticas

$$\mathcal{A}[s_1 s_2] = s_1 \mathcal{A}[s_2] = 2 s_1 s_2$$

si s_1 y s_2 son analíticas

Señales reales

$$\mathcal{A}[s_1 s_2] = s_1 \mathcal{A}[s_2]$$

si $s_1 = 0$ para $|w| \geq w_1$ y $s_2 = 0$ para $|w| \leq w_1$

Interpretación física de la Señal Analítica

Teorema de factorización Al ser una función compleja se puede llevar a una forma de ampitud y fase.

$$\mathcal{A}[s(t)] = A(t)e^{j\phi(t)}$$

¿Cuáles son sus características? Amplitud: contenido espectral menor que la exponencial.
Ejemplo:

$$s(t) = A(t)e^{j\omega_0 t}$$

Es analítica si el ancho de banda de $A(t)$ es menor a ω_0
En el caso general, es analítica si el ancho de banda de $A(t)$ está contenido en $(-\omega_1, \omega_1)$ y el espectro de $e^{j\phi(t)}$ es nulo para frecuencias menores a ω_1.

La Aproximación en Cuadratura

Parece natural que si la señal real es $s(t) = A(t)\cos\varphi(t)$, la señal compleja sea

$$s_q(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

A $s_q(t)$ se le llama el modelo de señal en cuadratura. No es evidente cómo hallar $A(t)$ y $\varphi(t)$ a partir de una señal dada. En ocasiones se cuenta con amplitud y fase y es directa esta construcción, cuando no nos importe que sea analítica.

Elección del Modelo. Criterio de la Energía.

¿Es bueno el modelo de cuadratura para $s(t) = A(t)\cos\varphi(t)$?

$$s_q(t) = A(t)e^{j\varphi(t)} \quad s_a(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Un criterio para evaluarlo es la energía de la diferencia, relacionado con cuánta energía hay del modelo en cuadratura en las frecuencias“negativas”.

$$\Delta E = \int |s_a - s_q|^2 dt = \int_{-\infty}^{0} |S_q(\omega)|^2 d\omega + \int_0^{\infty} |S_q^*(-\omega)|^2 d\omega$$

$$\Delta E = 2\int_{-\infty}^{0} |S_q(\omega)|^2 d\omega$$

Otro criterio más estricto “punto a punto”: $|s_a(t) - s_q(t)|$ que es fácil probar que toma como valor máximo:

$$|s_a(t) - s_q(t)| \leq \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} |S_q(\omega)|d\omega$$

Contenido

Frecuencia Instantánea

La señal analítica es compleja y puede ser escrita en cuadratura

$$z(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

Si la contribución AM es mucho menor a la contribución FM, la frecuencia instantánea (IF) se puede considerar como $\omega_i(t) = \varphi'(t)$.

¿Es ésta una buena idea?

$$s(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$w_i(t) = \varphi'(t) = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) + \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\frac{A_2^2 - A_1^2}{A^2(t)}$$

Para $(\omega_1, A_1, \omega_2, A_2) = (10, 0.2, 20, 1)$, entonces ocasionalmente $\omega_i(t) > 20$.

Frecuencia Instantánea

La señal analítica es compleja y puede ser escrita en cuadratura

$$z(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

Si la contribución AM es mucho menor a la contribución FM, la frecuencia instantánea (IF) se puede considerar como $\omega_i(t) = \varphi'(t)$.

¿Es ésta una buena idea?

$$s(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$w_i(t) = \varphi'(t) = \tfrac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) + \tfrac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\frac{A_2^2 - A_1^2}{A^2(t)}$$

Para $(\omega_1, A_1, \omega_2, A_2) = (10, 0.2, 20, 1)$, entonces ocasionalmente $\omega_i(t) > 20$.

Densidad de la Frecuencia Instantánea

- La densidad de la frecuencia instantánea, $P(\omega_i)$, está dada por

$$P(\omega_i) = \int \delta\big(\omega_i - \varphi'(t)\big)\, |s(t)|^2 dt$$

- El "ancho" de la frecuencia instantánea

$$\sigma_{IF}^2 = \int \big(\varphi'(t) - \langle\omega\rangle\big)^2\, |s(t)|^2\, dt$$

Relativo al ancho de banda B

$$B^2 = \sigma_{IF}^2 + \int A'(t)^2 dt$$

Densidad de la Frecuencia Instantánea

- La densidad de la frecuencia instantánea, $P(\omega_i)$, está dada por

$$P(\omega_i) = \int \delta\big(\omega_i - \varphi'(t)\big)\,|s(t)|^2 dt$$

- El “ancho” de la frecuencia instantánea

$$\sigma_{IF}^2 = \int \big(\varphi'(t) - \langle\omega\rangle\big)^2\,|s(t)|^2\,dt$$

Relativo al ancho de banda B

$$B^2 = \sigma_{IF}^2 + \int A'(t)^2 dt$$

Densidad de la Frecuencia Instantánea

- La densidad de la frecuencia instantánea, $P(\omega_i)$, está dada por

$$P(\omega_i) = \int \delta\big(\omega_i - \varphi'(t)\big)\, |s(t)|^2 dt$$

- El "ancho" de la frecuencia instantánea

$$\sigma_{IF}^2 = \int \big(\varphi'(t) - \langle\omega\rangle\big)^2\, |s(t)|^2\, dt$$

Relativo al ancho de banda B

$$B^2 = \sigma_{IF}^2 + \int A'(t)^2 dt$$

Contenido

Principio de Incertidumbre

- El teorema del producto tiempo-frecuencia o principio de incertidumbre es una propiedad propia de pares de Fourier.
- Fue derivada por vez primera por W. Heisenberg en 1927 en el área de mecánica cuántica, y extendido a pares relacionados por Fourier por C.G. Darwin en 1930.
- Establece que las densidades de tiempo y frecuencia no pueden ser arbitrariamente angostas simultáneamente.
- El teorema del producto tiempo–ancho de banda establece restricciones morfológicas intrínsecas al espacio tiempo–frecuencia.

Contenido

El Principio de Incertidumbre

Repetimos las definiciones de la duración T y ancho de banda B

$$T^2 = \sigma_t^2 = \int \left(t - \langle t \rangle\right)^2 |s(t)|^2 \, dt$$

$$B^2 = \sigma_\omega^2 = \int \left(\omega - \langle \omega \rangle\right)^2 |S(\omega)|^2 \, d\omega$$

El principio de incertidumbre es

$$TB \geq \tfrac{1}{2}$$

Una versión más fuerte del principio de incertidumbre es

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 4\mathrm{Cov}_{t\omega}^2}$$

El Principio de Incertidumbre

Repetimos las definiciones de la duración T y ancho de banda B

$$T^2 = \sigma_t^2 = \int \left(t - \langle t \rangle\right)^2 |s(t)|^2 \, dt$$

$$B^2 = \sigma_\omega^2 = \int \left(\omega - \langle \omega \rangle\right)^2 |S(\omega)|^2 \, d\omega$$

El principio de incertidumbre es

$$TB \geq \tfrac{1}{2}$$

Una versión más fuerte del principio de incertidumbre es

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \tfrac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \mathrm{Cov}_{t\omega}^2}$$

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t+\langle t\rangle)$$

Recordando...Trucos para el cálculo

$$\langle\omega\rangle = \int s^*(t)\,\frac{1}{j}\frac{d}{dt}s(t)\,dt \qquad \langle\omega^2\rangle = \int s^*(t)\,\left(\frac{1}{j}\frac{d}{dt}\right)^n s(t)\,dt$$

$$\begin{aligned}
\langle\omega^2\rangle = \int \omega^2|S(\omega)|^2 d\omega &= \int s^*(t)\left(\frac{1}{j}\frac{d}{dt}\right)^2 s(t)dt \\
&= -\int s^*(t)\frac{d^2}{dt^2}s(t)dt \\
&= -\int s^*(t)\frac{d}{dt}\frac{d}{dt}s(t)dt \\
&= -\int \left(\frac{d}{dt}s(t)\right)^* \frac{d}{dt}s(t)dt \\
&= \int \left|\frac{d}{dt}s(t)\right|^2 dt
\end{aligned}$$

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t + \langle t\rangle)$$

Como $\sigma_\omega^2 = \int |s'(t)|^2 \, dt$, el producto duración–ancho de banda es

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{\text{Schwarz}}{\geq} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

El integrando, escrito en términos de amplitud y fase es $ts^*(t)s'(t) = tA'A + jt\varphi' A^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2 - \frac{1}{2}A^2 + jt\varphi' A^2$.

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t + \langle t\rangle)$$

Como $\sigma_\omega^2 = \int |s'(t)|^2 \, dt$, el producto duración–ancho de banda es

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{\text{Schwarz}}{\geq} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

El integrando, escrito en términos de amplitud y fase es $ts^*(t)s'(t) = tA'A + jt\varphi' A^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2 - \frac{1}{2}A^2 + jt\varphi' A^2$.

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t + \langle t\rangle)$$

Como $\sigma_\omega^2 = \int |s'(t)|^2 \, dt$, el producto duración–ancho de banda es

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{\text{Schwarz}}{\geq} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

El integrando, escrito en términos de amplitud y fase es $ts^*(t)s'(t) = tA'A + jt\varphi' A^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2 - \frac{1}{2}A^2 + jt\varphi' A^2$.

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t + \langle t\rangle)$$

Como $\sigma_\omega^2 = \int |s'(t)|^2 \, dt$, el producto duración–ancho de banda es

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{\text{Schwarz}}{\geq} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

El integrando, escrito en términos de amplitud y fase es $ts^*(t)s'(t) = tA'A + jt\varphi' A^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2 - \frac{1}{2}A^2 + jt\varphi' A^2$.

Prueba... desarrollando

$$s(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

$$\begin{aligned} ts^*(t)s'(t) &= tA(t)e^{-j\varphi(t)}\left[A'(t)e^{j\varphi(t)} + j\varphi'(t)e^{j\varphi(t)}\right] \\ &= tA'(t)A(t) + jt\varphi'(t)A^2(t) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2(t) = \frac{A^2(t) + 2tA'(t)A(t)}{2} = \frac{A^2(t)}{2} + tA'(t)A(t)$$

Obteniendo:

$$ts^*(t)s'(t) = tA'(t)A(t) + jt\varphi'(t)A^2(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2(t) - \frac{A^2(t)}{2}$$

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t + \langle t\rangle)$$

Como $\sigma_\omega^2 = \int |s'(t)|^2 \, dt$, el producto duración–ancho de banda es

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2 = \int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{\text{Schwarz}}{\geq} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

El integrando, escrito en términos de amplitud y fase es
$ts^*(t)s'(t) = tA'A + jt\varphi' A^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2 - \frac{1}{2}A^2 + jt\varphi' A^2$.

Entonces

$$\sigma_t^2\sigma_\omega^2 \geq \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2 = \left|-\frac{1}{2} + j\mathrm{Cov}_{t\omega}\right|^2 = \frac{1}{4} + \mathrm{Cov}_{t\omega}^2$$

Prueba

Por simplicidad asumiremos que la señal tiene tiempo medio nulo y frecuencia, o podemos considerar la nueva señal obtenida

$$s_{\text{new}}(t) = e^{-j\langle\omega\rangle(t+\langle t\rangle)} s_{\text{old}}(t + \langle t\rangle)$$

Como $\sigma_\omega^2 = \int |s'(t)|^2 \, dt$, el producto duración–ancho de banda es

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{\text{Schwarz}}{\geq} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

El integrando, escrito en términos de amplitud y fase es
$ts^*(t)s'(t) = tA'A + jt\varphi' A^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}tA^2 - \frac{1}{2}A^2 + jt\varphi' A^2$.

Entonces

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2 = \left|-\tfrac{1}{2} + j\text{Cov}_{t\omega}\right|^2 = \tfrac{1}{4} + \text{Cov}_{t\omega}^2$$

Alcanzando la Igualdad

$$\int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{?}{=} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

Alcanzando la Igualdad

$$\int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \stackrel{?}{=} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

La igualdad se alcanza si

$$s'(t) \propto ts(t)$$

Alcanzando la Igualdad

$$\int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \;\stackrel{?}{=}\; \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

La igualdad se alcanza si

$$s'(t) \propto ts(t) \quad \Longrightarrow \quad s(t) = e^{-\alpha t^2}$$

Alcanzando la Igualdad

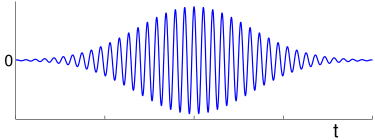
$$\int \left|ts(t)\right|^2 dt \times \int \left|s'(t)\right|^2 dt \overset{?}{=} \left|\int ts^*(t)s'(t)dt\right|^2$$

La igualdad se alcanza si

$$s'(t) \propto ts(t) \quad \Longrightarrow \quad s(t) = e^{-\alpha t^2}$$

Extendiendo este resultado a cualquier tiempo y frecuencia promedio...

$$s(t) = e^{-\alpha(t-\langle t\rangle)^2} e^{j\langle\omega\rangle t}$$



Conclusiones

- La duración y ancho de banda de una señal no pueden ser arbitrariamente pequeñas $TB \geq \frac{1}{2}$.
- La igualdad $TB = \frac{1}{2}$ es especialmente interesante porque indica señales con la concentración más compacta de densidad de energía tiempo–frecuencia.
- Los wavelets gaussianos cumplen esta igualdad.
- Adicionalmente, la igualdad en la versión fuerte del principio de incertidumbre se cumple para "chirplets" Gaussianos.