

# Espectrograma

## Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería Universidad de la República

October 2, 2023

- 1 El Espectrograma
  - Introducción
  - Propiedades
  
- 2 Análisis de Fourier de tiempo corto

# Contenido

## 1 El Espectrograma

- Introducción
- Propiedades

## 2 Análisis de Fourier de tiempo corto

# Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Motivación:

Representar señales no estacionarias, identificando componentes o fuentes que ocurren en diferentes instantes y frecuencias.

Describir cómo el espectro varía a lo largo del tiempo.

Desafíos: Estudiar los límites de esta representación en cuanto a la resolución tiempo-frecuencia.

# Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Para estudiar la señal en el tiempo  $t$ , multiplicamos la señal por una “ventana” ,  $h(t)$ , centrada en  $t$

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

# Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Para estudiar la señal en el tiempo  $t$ , multiplicamos la señal por una “ventana” ,  $h(t)$ , centrada en  $t$

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

La ventana debe lograr el siguiente cometido

$$s_t(\tau) \sim \begin{cases} s(\tau) & \text{para } \tau \text{ cercano a } t \\ 0 & \text{para } \tau \text{ lejos de } t \end{cases}$$

# Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Para estudiar la señal en el tiempo  $t$ , multiplicamos la señal por una “ventana” ,  $h(t)$ , centrada en  $t$

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

La ventana debe lograr el siguiente cometido

$$s_t(\tau) \sim \begin{cases} s(\tau) & \text{para } \tau \text{ cercano a } t \\ 0 & \text{para } \tau \text{ lejos de } t \end{cases}$$

La transformada de Fourier de  $s_t(\tau)$  (con respecto a  $\tau$ ) produce la “short-time Fourier transform” (STFT)

$$S_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

# El Espectrograma

La densidad de energía del espectro en el tiempo  $t$  es entonces

$$P_{\text{SP}}(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2$$

Para cada tiempo se tiene un espectro diferente. La totalidad de ese espectro es la distribución tiempo–frecuencia,  $P_{\text{SP}}(t, \omega)$ .



# El Espectrograma

La densidad de energía del espectro en el tiempo  $t$  es entonces

$$P_{\text{SP}}(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2$$

Para cada tiempo se tiene un espectro diferente. La totalidad de ese espectro es la distribución tiempo–frecuencia,  $P_{\text{SP}}(t, \omega)$ .

La densidad  $P_{\text{SP}}$  se define como el “Espectrograma”.

# Transformada de Fourier de Tiempo corto inversa

Podemos querer estudiar las propiedades temporales para una cierta frecuencia  $\omega$ .

$$s_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\eta) H(\eta - \omega) e^{-j\eta t} d\eta$$

# Transformada de Fourier de Tiempo corto inversa

Podemos querer estudiar las propiedades temporales para una cierta frecuencia  $\omega$ .

$$s_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\eta) H(\eta - \omega) e^{-j\eta t} d\eta$$

Considerando que la ventana  $H(\omega)$  se define como

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(t) e^{-j\omega t} dt$$

y entonces

$$S_t(\omega) = e^{-j\omega t} s_{\omega}(t).$$

# Transformada de Fourier de Tiempo corto inversa

Podemos querer estudiar las propiedades temporales para una cierta frecuencia  $\omega$ .

$$s_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\eta) H(\eta - \omega) e^{-j\eta t} d\eta$$

Considerando que la ventana  $H(\omega)$  se define como

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(t) e^{-j\omega t} dt$$

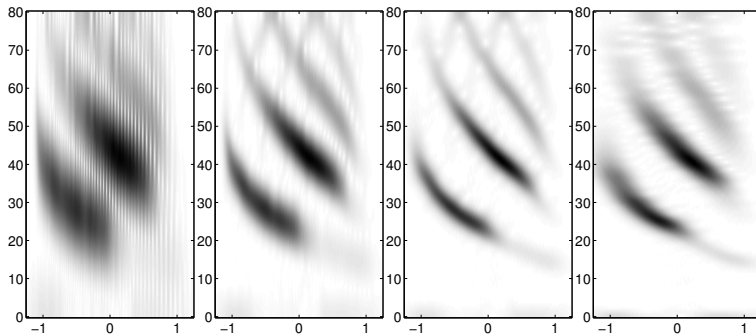
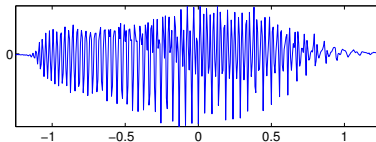
y entonces

$$S_t(\omega) = e^{-j\omega t} s_{\omega}(t).$$

Entonces, ¡o bien tiempo corto o frecuencia corta obtiene el espectrograma!

$$P(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = |s_{\omega}(t)|^2$$

## Efecto del largo de la ventana

 $T_w = 0.1$  $\times 2$  $\times 2$  $\times 2$

# Contenido

## 1 El Espectrograma

- Introducción
- Propiedades

## 2 Análisis de Fourier de tiempo corto

# Propiedades Generales

- Función Característica

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \iint |S_t(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau\omega} dt d\omega = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau)$$

$$A_s(\theta, \tau) = \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta t} dt$$

$$A_h(\theta, \tau) = \int h^*(t - \frac{1}{2}\tau) h(t + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta t} dt$$

- Energía total

$$E_{SP} = \iint P_{SP}(t, \omega) dt d\omega = \int |s(t)|^2 dt \times \int |h(t)|^2 dt$$

# Propiedades Generales



# Propiedades Generales

- Marginales

$$P(t) = \int |S_t(\omega)|^2 = \int A^2(t)A_h^2(\tau - t)d\tau \neq |s(t)|^2$$

$$P(\omega) = \int B^2(\eta)B_h^2(\omega - \eta)d\eta \neq |S(\omega)|^2$$

# Propiedades Generales

- Marginales

$$P(t) = \int |S_t(\omega)|^2 = \int A^2(t) A_h^2(\tau - t) d\tau \neq |s(t)|^2$$

$$P(\omega) = \int B^2(\eta) B_h^2(\omega - \eta) d\eta \neq |S(\omega)|^2$$

- Soporte no finito en ambos dominios

# Propiedades Generales

- Marginales

$$P(t) = \int |S_t(\omega)|^2 = \int A^2(t) A_h^2(\tau - t) d\tau \neq |s(t)|^2$$

$$P(\omega) = \int B^2(\eta) B_h^2(\omega - \eta) d\eta \neq |S(\omega)|^2$$

- Soporte no finito en ambos dominios
- Compromiso de localización. Las funciones  $h(t)$  y  $H(\omega)$  determinan la precisión de la localización en tiempo y en frecuencia de acuerdo al principio de incertidumbre.

# Cantidades globales

- El tiempo promedio y frecuencia promedio en el espectrograma

$$\langle t \rangle^{(\text{SP})} = \iint t |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle t \rangle^{(s)} - \langle t \rangle^{(h)}$$

$$\langle \omega \rangle^{(\text{SP})} = \iint \omega |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle \omega \rangle^{(s)} + \langle \omega \rangle^{(h)}$$

Con una ventana simétrica,  $\langle t \rangle^{(h)} = 0$  y  $\langle \omega \rangle^{(h)} = 0$ .

# Cantidades globales

- El tiempo promedio y frecuencia promedio en el espectrograma

$$\langle t \rangle^{(\text{SP})} = \iint t |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle t \rangle^{(s)} - \langle t \rangle^{(h)}$$

$$\langle \omega \rangle^{(\text{SP})} = \iint \omega |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle \omega \rangle^{(s)} + \langle \omega \rangle^{(h)}$$

Con una ventana simétrica,  $\langle t \rangle^{(h)} = 0$  y  $\langle \omega \rangle^{(h)} = 0$ .

- La duración y ancho de banda

$$T_{\text{SP}}^2 = T_s^2 + T_h^2 \quad ; \quad B_{\text{SP}}^2 = B_s^2 + B_h^2$$

# Cantidades globales

- El tiempo promedio y frecuencia promedio en el espectrograma

$$\langle t \rangle^{(\text{SP})} = \iint t |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle t \rangle^{(s)} - \langle t \rangle^{(h)}$$

$$\langle \omega \rangle^{(\text{SP})} = \iint \omega |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle \omega \rangle^{(s)} + \langle \omega \rangle^{(h)}$$

Con una ventana simétrica,  $\langle t \rangle^{(h)} = 0$  y  $\langle \omega \rangle^{(h)} = 0$ .

- La duración y ancho de banda

$$T_{\text{SP}}^2 = T_s^2 + T_h^2 \quad ; \quad B_{\text{SP}}^2 = B_s^2 + B_h^2$$

- Covarianza para ventanas reales

$$\text{Cov}_{tw}^{(\text{SP})} = \text{Cov}_{tw}^{(s)}$$

# Ensanche y Estrechamiento de la Ventana

Consideremos una ventana que se aproxima a un función delta

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t)$$

La frecuencia media en el tiempo  $t$  es

$$\langle \omega \rangle_t \rightarrow \varphi'(t)$$

# Ensache y Estrechamiento de la Ventana

Consideremos una ventana que se aproxima a un función delta

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t)$$

La frecuencia media en el tiempo  $t$  es

$$\langle \omega \rangle_t \rightarrow \varphi'(t)$$

Este es un resultado coherente e importante, pero hay un costo a pagar: a medida que se estrecha la ventana, la resolución en frecuencia se deteriora

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t) \quad ; \quad \sigma_{\omega|t} \rightarrow \infty$$



# Ensache y Estrechamiento de la Ventana

Consideremos una ventana que se aproxima a un función delta

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t)$$

La frecuencia media en el tiempo  $t$  es

$$\langle \omega \rangle_t \rightarrow \varphi'(t)$$

Este es un resultado coherente e importante, pero hay un costo a pagar: a medida que se estrecha la ventana, la resolución en frecuencia se deteriora

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t) \quad ; \quad \sigma_{\omega|t} \rightarrow \infty$$

De la misma manera, el retardo de grupo  $\langle t \rangle_{\omega}$  experimenta la misma desventaja.

# Inversión

¿Es posible recuperar la señal  $s(t)$  a partir de su Espectrograma  $P_{\text{SP}}(t, \omega)$ ?

# Inversión

¿Es posible recuperar la señal  $s(t)$  a partir de su Espectrograma  $P_{SP}(t, \omega)$ ?

Dado que el espectrograma es el cuadrado del valor absoluto de la de la Transformada de Furier de tiempo corto, se suele decir que la fase se perdió y por lo tanto la señal no puede ser recuperada.

# Inversión

¿Es posible recuperar la señal  $s(t)$  a partir de su Espectrograma  $P_{SP}(t, \omega)$ ?

Dado que el espectrograma es el cuadrado del valor absoluto de la de la Transformada de Furier de tiempo corto, se suele decir que la fase se perdió y por lo tanto la señal no puede ser recuperada.

Pero a partir de la función característica

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \iint |S_t(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau\omega} dt d\omega = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau)$$

Aplicando Fourier inversa a:

$$A_s(\theta, \tau) = \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta t} dt$$

y evaluando en:  $t = \tau/2$

# Inversión

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \iint |S_t(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau\omega} dt d\omega = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int A_s(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta = s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau)$$

y evaluando en:  $t = \tau/2$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi s^*(0)} \int \frac{M_{SP}(\theta, t)}{A_h(-\theta, t)} e^{-j\theta t/2} d\theta$$

donde  $M_{SP}(\theta, t)$  es la función característica, la función 2D que corresponde a la transformada de Fourier del espectrograma.

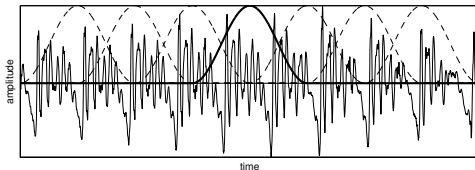
# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## STFT - Tiempo discreto

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

- STFT tiempo discreto:  $X_n(e^{j\omega})$ ,  $n$  discreta,  $\omega$  continua



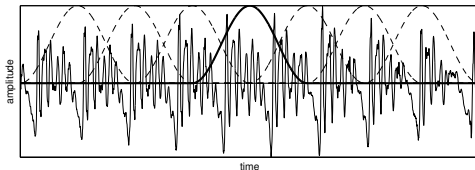
# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## STFT - Tiempo discreto

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

- STFT tiempo discreto:  $X_n(e^{j\omega})$ ,  $n$  discreta,  $\omega$  continua
- STFT discreta:  $X_n[k] = X_n(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$   $k = 0 \dots N - 1$



# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

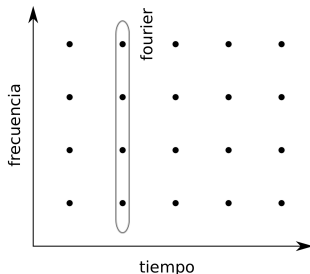
## Short Time Fourier Transform (STFT)

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

## Interpretación

fijo  $n$ : TF de  $w[n-m]x[m]$





# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

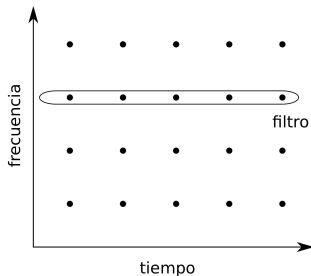
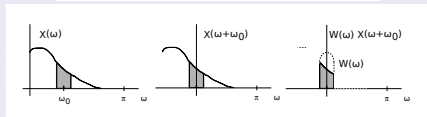
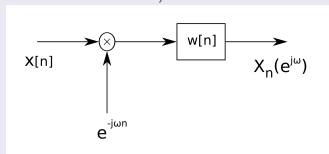
## Short Time Fourier Transform (STFT)

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

## Interpretación

fijo  $\omega$ : convolución, filtro



# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

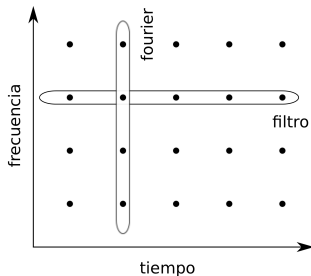
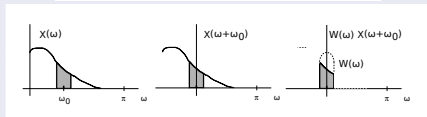
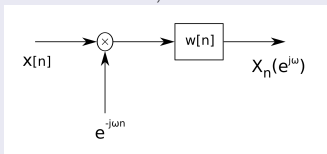
## Short Time Fourier Transform (STFT)

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

## Interpretación

fijo  $\omega$ : convolución, filtro



# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$

# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$
- simetría Hermítica para  $x[m]w[n - m]$  real

# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$
- simetría Hermítica para  $x[m]w[n-m]$  real
- corrimiento temporal  $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$
- simetría Hermítica para  $x[m]w[n-m]$  real
- corrimiento temporal  $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

## Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

# Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$
- simetría Hermítica para  $x[m]w[n-m]$  real
- corrimiento temporal  $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

## Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n-m] \xleftrightarrow{\text{TF}} W(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}$$



## Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$
- simetría Hermítica para  $x[m]w[n-m]$  real
- corrimiento temporal  $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

## Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n-m] \xleftrightarrow{\text{TF}} W(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}$$

convolución de las transformadas de  $x[m]$  y  $w[n-m]$

$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\theta})e^{j\theta n} X(e^{j(\omega+\theta)})d\theta$$

## Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

## Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$  es una TF respecto a  $\omega$ :

- periódica de período  $2\pi$
- simetría Hermítica para  $x[m]w[n-m]$  real
- corrimiento temporal  $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

## Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n-m] \xleftrightarrow{\text{TF}} W(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}$$

convolución de las transformadas de  $x[m]$  y  $w[n-m]$

$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\theta})e^{j\theta n} X(e^{j(\omega+\theta)})d\theta$$

STFT como versión suavizada de la TF de una parte de la señal