

Espectrograma

Análisis Tiempo–Frecuencia

IIE

¹Facultad de Ingeniería Universidad de la República

October 2, 2023

- 1 El Espectrograma
 - Introducción
 - Propiedades

- 2 Análisis de Fourier de tiempo corto

Contenido

1 El Espectrograma

- Introducción
- Propiedades

2 Análisis de Fourier de tiempo corto

Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Motivación:

Representar señales no estacionarias, identificando componentes o fuentes que ocurren en diferentes instantes y frecuencias.

Describir cómo el espectro varía a lo largo del tiempo.

Desafíos: Estudiar los límites de esta representación en cuanto a la resolución tiempo-frecuencia.

Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Para estudiar la señal en el tiempo t , multiplicamos la señal por una “ventana” , $h(t)$, centrada en t

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Para estudiar la señal en el tiempo t , multiplicamos la señal por una “ventana” , $h(t)$, centrada en t

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

La ventana debe lograr el siguiente cometido

$$s_t(\tau) \sim \begin{cases} s(\tau) & \text{para } \tau \text{ cercano a } t \\ 0 & \text{para } \tau \text{ lejos de } t \end{cases}$$

Transformada de Fourier de tiempo corto - Short-time Fourier Transform

Para estudiar la señal en el tiempo t , multiplicamos la señal por una “ventana” , $h(t)$, centrada en t

$$s_t(\tau) = s(\tau)h(\tau - t)$$

La ventana debe lograr el siguiente cometido

$$s_t(\tau) \sim \begin{cases} s(\tau) & \text{para } \tau \text{ cercano a } t \\ 0 & \text{para } \tau \text{ lejos de } t \end{cases}$$

La transformada de Fourier de $s_t(\tau)$ (con respecto a τ) produce la “short-time Fourier transform” (STFT)

$$S_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

El Espectrograma

La densidad de energía del espectro en el tiempo t es entonces

$$P_{\text{SP}}(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2$$

Para cada tiempo se tiene un espectro diferente. La totalidad de ese espectro es la distribución tiempo–frecuencia, $P_{\text{SP}}(t, \omega)$.

El Espectrograma

La densidad de energía del espectro en el tiempo t es entonces

$$P_{\text{SP}}(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int s(\tau)h(\tau - t)e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2$$

Para cada tiempo se tiene un espectro diferente. La totalidad de ese espectro es la distribución tiempo–frecuencia, $P_{\text{SP}}(t, \omega)$.

La densidad P_{SP} se define como el “Espectrograma”.

Transformada de Fourier de Tiempo corto inversa

Podemos querer estudiar las propiedades temporales para una cierta frecuencia ω .

$$s_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\eta) H(\eta - \omega) e^{-j\eta t} d\eta$$

Transformada de Fourier de Tiempo corto inversa

Podemos querer estudiar las propiedades temporales para una cierta frecuencia ω .

$$s_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\eta) H(\eta - \omega) e^{-j\eta t} d\eta$$

Considerando que la ventana $H(\omega)$ se define como

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(t) e^{-j\omega t} dt$$

y entonces

$$S_t(\omega) = e^{-j\omega t} s_{\omega}(t).$$

Transformada de Fourier de Tiempo corto inversa

Podemos querer estudiar las propiedades temporales para una cierta frecuencia ω .

$$s_{\omega}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int S(\eta)H(\eta - \omega) e^{-j\eta t} d\eta$$

Considerando que la ventana $H(\omega)$ se define como

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int h(t)e^{-j\omega t} dt$$

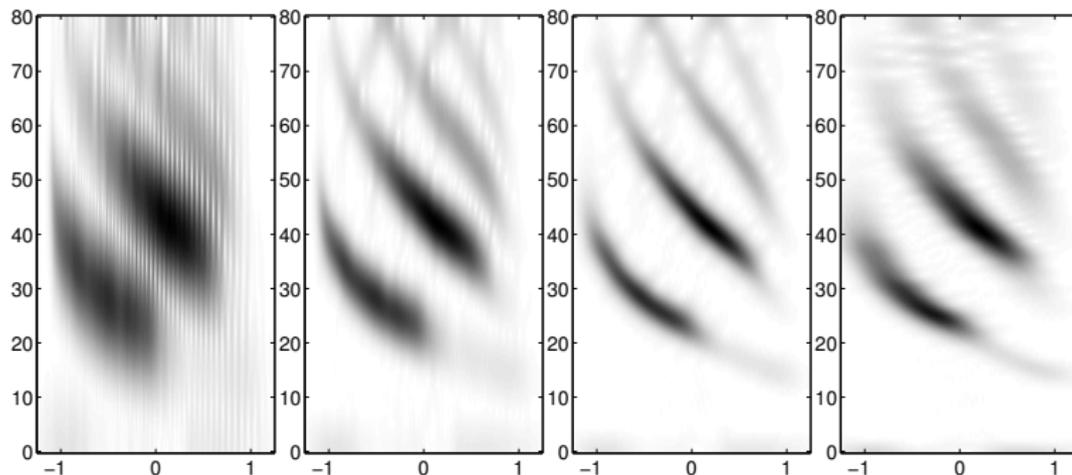
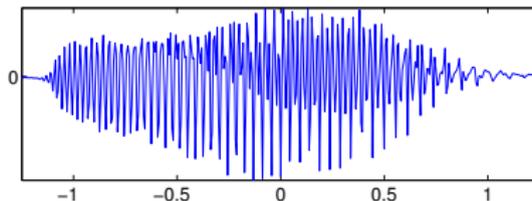
y entonces

$$S_t(\omega) = e^{-j\omega t} s_{\omega}(t).$$

Entonces, ¡o bien tiempo corto o frecuencia corta obtiene el espectrograma!

$$P(t, \omega) = |S_t(\omega)|^2 = |s_{\omega}(t)|^2$$

Efecto del largo de la ventana

 $T_w = 0.1$ $\times 2$ $\times 2$ $\times 2$

Contenido

1 El Espectrograma

- Introducción
- Propiedades

2 Análisis de Fourier de tiempo corto

Propiedades Generales

- Función Característica

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \iint |S_t(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau\omega} dt d\omega = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau)$$

$$A_s(\theta, \tau) = \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta t} dt$$

$$A_h(\theta, \tau) = \int h^*(t - \frac{1}{2}\tau) h(t + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta t} dt$$

- Energía total

$$E_{SP} = \iint P_{SP}(t, \omega) dt d\omega = \int |s(t)|^2 dt \times \int |h(t)|^2 dt$$

Propiedades Generales

Propiedades Generales

- Marginales

$$P(t) = \int |S_t(\omega)|^2 = \int A^2(t) A_h^2(\tau - t) d\tau \neq |s(t)|^2$$

$$P(\omega) = \int B^2(\eta) B_h^2(\omega - \eta) d\eta \neq |S(\omega)|^2$$

Propiedades Generales

- Marginales

$$P(t) = \int |S_t(\omega)|^2 = \int A^2(t) A_h^2(\tau - t) d\tau \neq |s(t)|^2$$

$$P(\omega) = \int B^2(\eta) B_h^2(\omega - \eta) d\eta \neq |S(\omega)|^2$$

- Soporte no finito en ambos dominios

Propiedades Generales

- Marginales

$$P(t) = \int |S_t(\omega)|^2 = \int A^2(t) A_h^2(\tau - t) d\tau \neq |s(t)|^2$$

$$P(\omega) = \int B^2(\eta) B_h^2(\omega - \eta) d\eta \neq |S(\omega)|^2$$

- Soporte no finito en ambos dominios
- Compromiso de localización. Las funciones $h(t)$ y $H(\omega)$ determinan la precisión de la localización en tiempo y en frecuencia de acuerdo al principio de incertidumbre.

Cantidades globales

- El tiempo promedio y frecuencia promedio en el espectrograma

$$\langle t \rangle^{(\text{SP})} = \iint t |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle t \rangle^{(s)} - \langle t \rangle^{(h)}$$

$$\langle \omega \rangle^{(\text{SP})} = \iint \omega |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle \omega \rangle^{(s)} + \langle \omega \rangle^{(h)}$$

Con una ventana simétrica, $\langle t \rangle^{(h)} = 0$ y $\langle \omega \rangle^{(h)} = 0$.

Cantidades globales

- El tiempo promedio y frecuencia promedio en el espectrograma

$$\langle t \rangle^{(\text{SP})} = \iint t |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle t \rangle^{(s)} - \langle t \rangle^{(h)}$$

$$\langle \omega \rangle^{(\text{SP})} = \iint \omega |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle \omega \rangle^{(s)} + \langle \omega \rangle^{(h)}$$

Con una ventana simétrica, $\langle t \rangle^{(h)} = 0$ y $\langle \omega \rangle^{(h)} = 0$.

- La duración y ancho de banda

$$T_{\text{SP}}^2 = T_s^2 + T_h^2 \quad ; \quad B_{\text{SP}}^2 = B_s^2 + B_h^2$$

Cantidades globales

- El tiempo promedio y frecuencia promedio en el espectrograma

$$\langle t \rangle^{(\text{SP})} = \iint t |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle t \rangle^{(s)} - \langle t \rangle^{(h)}$$

$$\langle \omega \rangle^{(\text{SP})} = \iint \omega |S_t(\omega)|^2 dt d\omega = \langle \omega \rangle^{(s)} + \langle \omega \rangle^{(h)}$$

Con una ventana simétrica, $\langle t \rangle^{(h)} = 0$ y $\langle \omega \rangle^{(h)} = 0$.

- La duración y ancho de banda

$$T_{\text{SP}}^2 = T_s^2 + T_h^2 \quad ; \quad B_{\text{SP}}^2 = B_s^2 + B_h^2$$

- Covarianza para ventanas reales

$$\text{Cov}_{tw}^{(\text{SP})} = \text{Cov}_{tw}^{(s)}$$

Ensanche y Estrechamiento de la Ventana

Consideremos una ventana que se aproxima a un función delta

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t)$$

La frecuencia media en el tiempo t es

$$\langle \omega \rangle_t \rightarrow \varphi'(t)$$

Ensache y Estrechamiento de la Ventana

Consideremos una ventana que se aproxima a un función delta

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t)$$

La frecuencia media en el tiempo t es

$$\langle \omega \rangle_t \rightarrow \varphi'(t)$$

Este es un resultado coherente e importante, pero hay un costo a pagar: a medida que se estrecha la ventana, la resolución en frecuencia se deteriora

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t) \quad ; \quad \sigma_{\omega|t} \rightarrow \infty$$

Ensache y Estrechamiento de la Ventana

Consideremos una ventana que se aproxima a un función delta

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t)$$

La frecuencia media en el tiempo t es

$$\langle \omega \rangle_t \rightarrow \varphi'(t)$$

Este es un resultado coherente e importante, pero hay un costo a pagar: a medida que se estrecha la ventana, la resolución en frecuencia se deteriora

$$A_h^2(t) \rightarrow \delta(t) \quad ; \quad \sigma_{\omega|t} \rightarrow \infty$$

De la misma manera, el retardo de grupo $\langle t \rangle_{\omega}$ experimenta la misma desventaja.

Inversión

¿Es posible recuperar la señal $s(t)$ a partir de su Espectrograma $P_{\text{SP}}(t, \omega)$?

Inversión

¿Es posible recuperar la señal $s(t)$ a partir de su Espectrograma $P_{SP}(t, \omega)$?

Dado que el espectrograma es el cuadrado del valor absoluto de la de la Transformada de Furier de tiempo corto, se suele decir que la fase se perdió y por lo tanto la señal no puede ser recuperada.

Inversión

¿Es posible recuperar la señal $s(t)$ a partir de su Espectrograma $P_{SP}(t, \omega)$?

Dado que el espectrograma es el cuadrado del valor absoluto de la de la Transformada de Furier de tiempo corto, se suele decir que la fase se perdió y por lo tanto la señal no puede ser recuperada.

Pero a partir de la función característica

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \iint |S_t(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau\omega} dt d\omega = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau)$$

Aplicando Fourier inversa a:

$$A_s(\theta, \tau) = \int s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau) e^{j\theta t} dt$$

y evaluando en: $t = \tau/2$

Inversión

$$M_{SP}(\theta, \tau) = \iint |S_t(\omega)|^2 e^{j\theta t + j\tau\omega} dt d\omega = A_s(\theta, \tau) A_h(-\theta, \tau)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int A_s(\theta, \tau) e^{-j\theta t} d\theta = s^*(t - \frac{1}{2}\tau) s(t + \frac{1}{2}\tau)$$

y evaluando en: $t = \tau/2$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi s^*(0)} \int \frac{M_{SP}(\theta, t)}{A_h(-\theta, t)} e^{-j\theta t/2} d\theta$$

donde $M_{SP}(\theta, t)$ es la función característica, la función 2D que corresponde a la transformada de Fourier del espectrograma.

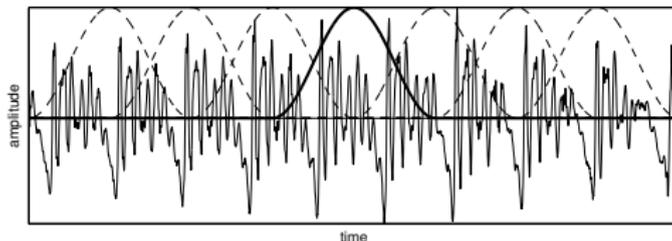
Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

STFT - Tiempo discreto

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

- STFT tiempo discreto: $X_n(e^{j\omega})$, n discreta, ω continua



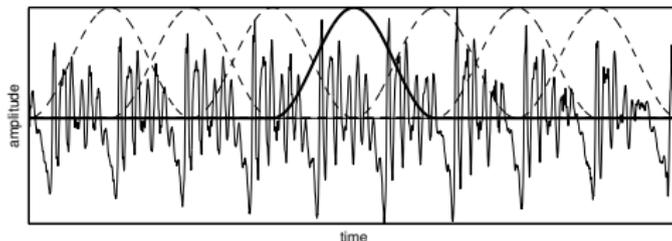
Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

STFT - Tiempo discreto

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

- STFT tiempo discreto: $X_n(e^{j\omega})$, n discreta, ω continua
- STFT discreta: $X_n[k] = X_n(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$ $k = 0 \dots N - 1$



Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

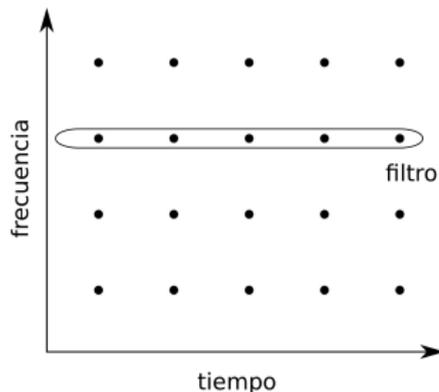
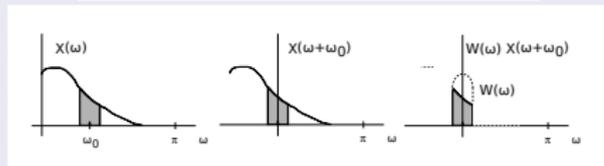
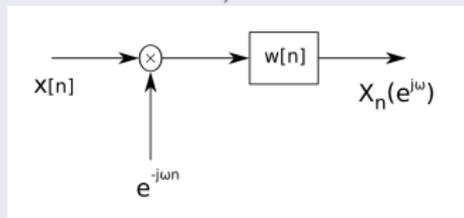
Short Time Fourier Transform (STFT)

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

Interpretación

fijo ω : convolución, filtro



Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

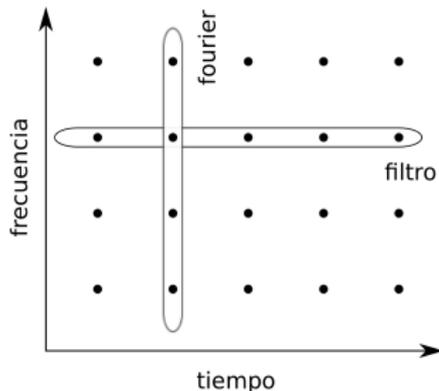
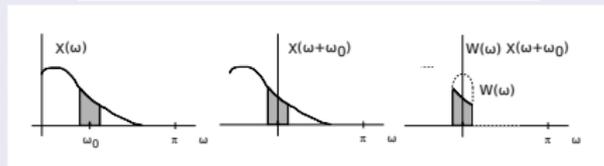
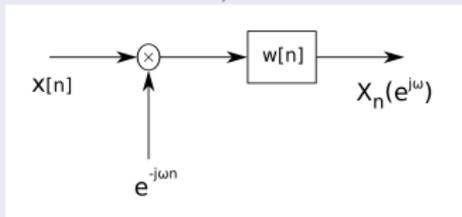
Short Time Fourier Transform (STFT)

Representación espectral que refleja variaciones temporales de la señal

$$X_n(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[n-m]x[m]e^{-j\omega m}$$

Interpretación

fijo ω : convolución, filtro



Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π
- simetría Hermítica para $x[m]w[n - m]$ real

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π
- simetría Hermítica para $x[m]w[n-m]$ real
- corrimiento temporal $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π
- simetría Hermítica para $x[m]w[n-m]$ real
- corrimiento temporal $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π
- simetría Hermítica para $x[m]w[n-m]$ real
- corrimiento temporal $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n-m] \xleftrightarrow{\text{TF}} W(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}$$

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π
- simetría Hermítica para $x[m]w[n-m]$ real
- corrimiento temporal $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n-m] \xleftrightarrow{\text{TF}} W(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}$$

convolución de las transformadas de $x[m]$ y $w[n-m]$

$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\theta})e^{j\theta n} X(e^{j(\omega+\theta)})d\theta$$

Análisis de Fourier de tiempo corto (STFT)

Propiedades de una TF

$X_n(e^{j\omega})$ es una TF respecto a ω :

- periódica de período 2π
- simetría Hermítica para $x[m]w[n-m]$ real
- corrimiento temporal $n_0 \rightarrow e^{-j\omega n_0} X_{n-n_0}(e^{j\omega})$

Efecto del inventanado

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j\omega m}, \quad W(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[m]e^{-j\omega m}$$

$$w[n-m] \xleftrightarrow{\text{TF}} W(e^{-j\omega})e^{-j\omega n}$$

convolución de las transformadas de $x[m]$ y $w[n-m]$

$$X_n(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\theta})e^{j\theta n} X(e^{j(\omega+\theta)})d\theta$$

STFT como versión suavizada de la TF de una parte de la señal