Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal I**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Curso anual 2017**

PRIMER PARCIAL – JUEVES 27 DE ABRIL DE 2017

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

- El puntaje total es 20 puntos.
- La duración del parcial es dos horas y media.

(I) Verdadero Falso. Total: 4 puntos

Puntajes: 1 punto si la respuesta es correcta, -1 punto si la respuesta es incorrecta, 0 punto por no contestar. Indique sus respuestas (V/F) en los casilleros correspondientes.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4
F	**V**	**F**	**V**

Ejercicio 1: Todo sistema lineal homogéneo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas es compatible determinado.

Ejercicio 2: Si $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ es una matriz simétrica entonces $2A$ también lo es.

Ejercicio 3: Si $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ es un conjunto linealmente dependiente entonces v_1 es combinación lineal de v_2 y v_3.

Ejercicio 4: Si A y B son dos matrices cuadradas invertibles entonces AB también es invertible.

(II) Desarrollo. Total: 16 puntos

Ejercicio 1: (4 puntos)

Halle el conjunto solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 5 \\ x - 3y - z = 1 \end{cases}$$

Solución:
El sistema es compatible indeterminado y su solución es

$$\{(2+2y, y, 1-y) : y \in \mathbb{R}\} = \{(4-2z, 1-z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(x, \frac{1}{2}x - 1, -\frac{1}{2}x + 2) : x \in \mathbb{R}\}$$

.

Ejercicio 2: (4 puntos)

La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es

Solución:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: (4 puntos)

Considere el conjunto de 3-uplas $\mathcal{B} = \{(1,0,2),(2,1,2),(1,-3,8)\}$.

i) Investigue si la 3-upla $(1,5,2)$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.
ii) Halle las condiciones que debe cumplir una 3-upla (a,b,c) para escribirse como combinación lineal de los elementos del conjunto $\mathcal{B}$.

Solución:

i) La 3-upla $(1,5,2)$ puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ si existen escalares α,β,γ de forma que $(1,5,2) = \alpha(1,0,2)+\beta(2,1,2)+\gamma(1,-3,8)$. Este sistema tiene como matriz ampliada:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 5 \\ 2 & 2 & 8 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Una forma escalerizada es la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 5 \end{pmatrix}$$

la cual indica que el sistema es incompatible y por lo tanto $(1,5,2)$ no puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$.

ii) En general una 3-upla (a,b,c) puede escribirse como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}$ si existen escalares α,β,γ de forma que $(a,b,c) = \alpha(1,0,2)+\beta(2,1,2)+\gamma(1,-3,8)$. Este sistema tiene como matriz la misma matriz de la parte anterior y cambia la columna de términos independientes de la matriz ampliada:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -3 & | & b \\ 2 & 2 & 8 & | & c \end{pmatrix}$$

Una forma escalerizada es la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & -3 & | & b \\ 0 & 0 & 0 & | & b-a+c/2 \end{pmatrix}$$

la cual indica que el sistema es compatible si y sólo si se cumple que $b - a + c/2 = 0$. Por lo tanto sólo las 3-uplas (a, b, c) que cumplan dicha condición van a poder escribirse como combinación lineal del conjunto $\mathcal{B}$.

Ejercicio 4: (4 puntos)

Considere el conjunto de n-uplas $\mathcal{B} = \{X_1, \cdots, X_r\}$.

i) Escriba la condición que debe cumplir $\mathcal{B}$ para ser un conjunto linealmente dependiente.
ii) Para $r = 2$ pruebe que $\mathcal{B} = \{X_1, X_2\}$ es linealmente dependiente si y sólo si X_1 es múltiplo de X_2 o X_2 es múltiplo de X_1.

Solución:

i) Ver teórico.
ii) Empecemos con el directo. Sabemos que $\mathcal{B} = \{X_1, X_2\}$ es linealmente dependiente, entonces (por definición) existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, no ambos nulos, tales que $(0, \cdots, 0) = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$. Como λ_1, λ_2 no son los dos cero, sabemos que $\lambda_1 \neq 0$ o $\lambda_2 \neq 0$. En el primer caso podemos despejar $X_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} X_2$ y en el segundo podemos despejar $X_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} X_1$.

   Para el recíproco sabemos que X_1 es múltiplo de X_2 o X_2 es múltiplo de X_1. Asumamos que X_1 es múltiplo de X_2 ya que el otro caso es análogo. Si X_1 es múltiplo de X_2 entonces existe λ tal que $X_1 = \lambda.X_2$ y por lo tanto $(0, \cdots, 0) = 1.X_1 - \lambda.X_2$ que es una combinación lineal con al menos un escalar no nulo.