Herramientas de representación tiempo-frecuencia

Instituto de Ingeniería Eléctrica
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Práctico 1 - 2023

Ejercicio 1

En este ejercicio se calculará la transformada de Fourier de un chirp lineal complejo con envolvente gaussiana,

$$s(t) = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\alpha t^2/2 + j\beta t^2/2 + j\omega_0 t}. \tag{1}$$

1. Calcular el valor $I(p)$ de la integral de una gaussiana compleja,

$$I(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt^2}\, dt, \quad \text{con} \quad p \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\{p\} > 0.$$

   Se sugiere calcular $I^2(p)$, lo cual se facilita pasando a coordenadas polares.

2. Calcular la transformada de Fourier de una gaussiana compleja,

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt^2} e^{-j\omega t}\, dt.$$

   Se sugiere expresar el exponente del integrando como la suma de un cuadrado perfecto y un término independiente de t. Además se sugiere emplear el siguiente resultado, que establece que un desplazamiento temporal complejo no cambia el valor de la integral de la parte anterior,[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p(t+c)^2}\, dt = I(p), \quad \text{con} \quad p, c \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\{p\} > 0.$$

3. Calcular la transformada de Fourier de la función $s(t)$ de la ecuación 1.

Ejercicio 2

La frecuencia media se define como

$$\langle \omega \rangle = \int \omega |S(\omega)|^2 d\omega.$$

[1]Ver *Spectral audio signal processing*, Julius O. Smith, apéndice D (disponible en línea).

Según esta ecuación, es necesario calcular primero el espectro de la señal, lo cual en muchas ocasiones puede ser difícil. El cálculo de la frecuencia media se simplifica considerablemente empleando la siguiente igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega |S(\omega)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} s^*(t) \frac{1}{j} \frac{d}{dt} s(t) \, dt. \tag{2}$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar dicha igualdad.

1. Si $x(t)$ y $y(t)$ forman pares de transformadas de Fourier con $X(\omega)$ y $Y(\omega)$ respectivamente, demostrar que:

   a) $\frac{d}{dt}x(t)$ y $j\omega X(\omega)$ son pares de transformadas de Fourier.

   b) se cumple la siguiente identidad (Identidad de Parseval):

   $$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) Y^*(\omega) \, d\omega$$

2. Con los resultados de la parte 1, demostrar la igualdad de la ecuación 2.

3. Calcular la frecuencia media $\langle \omega \rangle$ del chirp lineal dado por la ecuación 1.

Ejercicio 3

Se consideran las siguientes señales:

$$\begin{aligned}
s_1(t) &= \cos(\omega_0 t) \\
s_2(t) &= e^{-\alpha t^2/2} \cos(\omega_0 t) \\
s_3(t) &= u(t) e^{-t/\tau} \cos(\omega_0 t) \\
s_4(t) &= \cos\left(\omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}\right).
\end{aligned}$$

1. Para cada señal, escriba el modelo en cuadratura correspondiente, definido como la señal compleja de la forma $s_q(t) = A(t) e^{j\varphi(t)}$.

De aquí en más, se asume que las señales están definidas en el tiempo $t \in [-1, 1]$ y los valores de los parámetros son $\omega_0 = 40\pi$, $\alpha = 50$, $\tau = 0{,}1$ y $\beta = 50$.

2. Para los modelos en cuadratura calcule en computadora el tiempo medio, la duración, la frecuencia media y el ancho de banda. Grafique las señales en el tiempo y en la frecuencia indicando los valores obtenidos. Discuta respecto a los resultados teóricos y compare las diferentes señales.

3. Calcule el producto duración-ancho de banda en cada caso y extraiga conclusiones sobre los resultados.

4. ¿Que sucedería con los valores encontrados en la parte 2 si en lugar de considerar los modelos en cuadratura se realizan los cálculos usando directamente las señales reales?

Ejercicio 4

Si bien las señales que se presentan en la naturaleza son reales, en diversas situaciones es conveniente definir una señal compleja que se corresponda de algún modo con la señal real. Considere una señal real en la forma $s(t) = A(t)\,\cos\varphi(t)$, donde $A(t)$ y $\varphi(t)$ son las funciones de modulación de amplitud y de modulación de fase respectivamente. Si $A(t)$ y $\varphi(t)$ son conocidas, es razonable escribir la correspondiente señal compleja como $s_q(t) = A(t)\,e^{j\varphi(t)}$, lo que se denomina modelo en cuadratura. Por el contrario, cuando no se conocen las funciones de modulación existen infinitas maneras de escribir una señal $s(t)$ en la forma $s(t) = A(t)\,\cos\varphi(t)$. Una alternativa para obtener una señal compleja a partir de $s(t)$ es calcular la señal analítica $s_a(t)$, como $s_a(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$, donde $S(\omega)$ es el espectro de $s(t)$. La señal analítica tiene un espectro idéntico a $S(\omega)$ para las frecuencias positivas y es cero para frecuencias negativas, permitiendo el cálculo directo de promedios y desviaciones en frecuencia.

1. Demuestre que la frecuencia promedio de $s_q(t)$ puede obtenerse como promedio temporal de la derivada de la ley de fase con la densidad de energía, es decir $\langle\omega\rangle = \int \varphi'(t)\,|s_q(t)|^2\,dt$. De este resultado es natural interpretar $\varphi'(t)$ como la frecuencia instantánea de la señal $s_q(t)$, lo cual constituye una de las motivaciones de definir una señal compleja asociada a $s(t)$.

2. Sintetice un chirplet gaussiano de la forma $s_q(t) = e^{-\alpha t^2/2}\,e^{j\beta t^2/2 + j\omega_0 t}$. Calcule y grafique la evolución de la frecuencia instantánea usando el resultado de la parte anterior.

3. Considere la señal real equivalente $s(t) = e^{-\alpha t^2/2}\cos(\omega_0 t + \beta t^2/2)$. Calcule la señal analítica $s_a(t)$ y aplique el mismo procedimiento para estimar la frecuencia instantánea.

4. Compare los resultados indicando cuándo el modelo en cuadratura es una muy bien aproximado con la señal analítica. Elija parámetros para un caso en el que se cumpla esa aproximación y para otro caso para los que la aproximación no es buena.

5. Exprese la señal analítica en términos de una elección de la fase y amplitud particulares. Considere la señal $s(t) = \cos\omega_1 t\cos\omega_2 t$ con $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2$ para ilustrarlo.

6. Estime la frecuencia instantánea para el sonido de gorrión provisto en la página del curso.

7. Discuta qué ocurre con la interpretabilidad de $\varphi'(t)$ como frecuencia instantánea para señales de múltiples componentes. Se sugiere ilustrar usando la suma de dos sinusoides de amplitud y frecuencia constante

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = A_1 e^{j\omega_1 t} + A_2 e^{j\omega_2 t} = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

   y el sonido de murciélago provisto en la página del curso.