

Primer parcial de Lógica

2 de Mayo 2016

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (8 puntos)

Considere el siguiente alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ y el conjunto A definido a continuación:

I $00 \in A$

II $11 \in A$

III Si $w \in A$, entonces $w00 \in A$

IV Si $w \in A$, entonces $w11 \in A$

- a. Defina la función $eval: A \rightarrow \mathbb{N}$ que para cada tira de A devuelve el natural que resulta de interpretarla como un número binario. Ej: $eval(1100) = 12$
- b. Demostrar que $(\forall w \in A)(eval(w) \text{ es múltiplo de } 3)$.

Ejercicio 2 (12 puntos)

Definimos inductivamente el lenguaje $\mathcal{H} \subseteq \text{PROP}$ de acuerdo a las siguientes reglas:

I Si $p_i \in P$, entonces $p_i \in \mathcal{H}$

II Si $\varphi \in \mathcal{H}$ y $\psi \in \mathcal{H}$, entonces $(\varphi \wedge \psi) \in \mathcal{H}$

III Si $p_i \in P$ y $\psi \in \mathcal{H}$, entonces $(p_i \rightarrow \psi) \in \mathcal{H}$

Indique si las siguientes frases son verdaderas o falsas. Justifique adecuadamente.

- a. Todas las proposiciones de \mathcal{H} son tautologías
- b. Ninguna proposición de \mathcal{H} es tautología
- c. $\forall \varphi \in \mathcal{H}, \text{PROP} \models \varphi$
- d. $\exists v_1$ valuación, $\forall \varphi \in \mathcal{H}, v_1(\varphi) = 1$
- e. $\exists v_2$ valuación, $\forall \psi \in \{(\neg \varphi) : \varphi \in \mathcal{H}\}, v_2(\psi) = 1$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construir derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

- a. $\neg(\beta \vee \alpha) \vdash (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$
 b. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi))$

En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{p_i / i \text{ es impar}\}$
- $\Delta = \{p_j \wedge p_m \rightarrow \neg p_n / \{p_j, p_m\} \subset \Gamma \text{ y } n = i + m\}$.

Nota: Tenga en cuenta los siguientes ejemplos.

- $p_3 \wedge p_3 \rightarrow \neg p_6 \in \Delta$
- $p_3 \wedge p_5 \rightarrow \neg p_{10} \notin \Delta$
- $p_{11} \wedge p_7 \rightarrow \neg p_{18} \in \Delta$

- a. Probar que $\Delta \not\vdash \perp$
 b. Probar que $\Gamma \not\vdash \perp$
 c. Probar $\Delta \cup \Gamma \not\vdash \neg p_0$
 d. De un conjunto consistente maximal que contenga todos los elementos de Γ y Δ . Justifique.