Práctico 2 - Sucesiones y Número e

1. Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

$$a)\quad a_n = 1+\frac{1}{n} \qquad b)\quad a_n = 1+\frac{(-1)^n}{n} \qquad c)\quad a_n = n+\frac{1}{n} \qquad d)\quad a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \qquad e)\quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

2. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$a)\quad a_n = \frac{\cos(n)}{n} \qquad b)\quad a_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \qquad c)\quad a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} \qquad d)\quad a_n = \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n}\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$$

$$e)\quad a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n) \qquad f)\quad a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}\ \alpha\in\mathbb{R} \qquad g)\quad a_n = \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$$

3. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$.

   a) Sea $\lambda\in\mathbb{R}$, probar que la sucesión $\bar{a}_n = a_n+\lambda$ converge y $\lim_{n\to+\infty}\bar{a}_n = a+\lambda$

   b) Probar que la sucesión $c_n = a_n+b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = a+b$

   c) Sea $\lambda\in\mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty}\tilde{a}_n = \lambda a$

   d) Probar que la sucesión $d_n = a_nb_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = ab$

   e) Probar que si $b_n, b\neq 0$ entonces la sucesión $e_n = \frac{a_n}{b_n}$ converge y $\lim_{n\to+\infty} e_n = \frac{a}{b}$

   f) Supongamos que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$. Sea c_n una sucesión real, probar que si existe $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}$ entonces existe el límite $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}$, más aún $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}$

   g) Sea f_n una sucesión acotada y suponga que $a = 0$, probar que la sucesión $g_n = a_nf_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$

4. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

$$a)\quad a_n = \frac{1+(-1)^n}{2} \qquad b)\quad a_n = (-1)^n n \qquad c)\quad a_n = 3^{\cos(n\pi)} \qquad d)\quad a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$e)\quad a_n = n^2\ (1+(-1)^n) \qquad f)\quad a_n = n^{(-1)^n} \qquad g)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$$

5. Sea a_n una sucesión tal que sus subsucesiones a_{2n}, a_{2n+1} y a_{3n} convergen. Probar que a_n es convergente.

6. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n\geq n_0$, $|a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

$$a)\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad b)\quad a_n = \frac{n}{n+1} \qquad c)\quad a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad d)\quad a_n = \frac{1}{n!} \qquad e)\quad a_n = \frac{2n}{n^3+1}$$

7. Sea A un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que $L = \sup(A)$ si y solo si:

a) $L \geq x, \forall x \in A$.

b) Existe $\{x_m\}$ una sucesión de A tal que $\lim_{m\to+\infty} x_m = L$

8. Determinar si las siguiente sucesiones convergen, y en caso de convergencia calcular su límite.

   a) $a_n = \frac{\alpha(n)}{n}$ donde $\alpha(n)$ es la cantidad de números primos que dividen a n

   b) $b_N = \frac{\#\{n\in\mathbb{N}: n\leq N \text{ y } n \text{ es un cuadrado perfecto }\}}{N}$

2. Funciones crecientes

1. En este ejercicio se construirá la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$

   a) Definimos inductivamente la sucesión a_n por

   - $a_0 = 1$
   - $a_{n+1} = 2a_n$

   La restricción de la función f en los naturales es a_n, esto es, $f(n) = a_n$.

   1) Probar que a_n es monótona creciente y no acotada.
   2) Probar inductivamente que $f(n)f(m) = f(n+m), \forall n,m \in \mathbb{N}$

   b) Para definir la función f en los enteros simplemente invertimos, esto es, $f(-n) = \frac{1}{f(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

   1) Probar que $f(n)f(m) = f(n+m), \forall n,m \in \mathbb{Z}$
   2) Probar que $f\,|_{\mathbb{Z}}: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es creciente.

   c) Para determinar f en $\mathbb{Q}$ usamos el siguiente método. Dados $p,q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^q = f(p)$. Definimos así $f(\frac{p}{q}) = y$

   1) Probar que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ se verifica que $f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2)$
   2) Probar que $f\,|_{\mathbb{Q}}: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ es creciente

   d) 1) Sea b_n una sucesión de racionales creciente y acotada. Probar que la sucesión $f_n = f(b_n)$ converge.
   2) Probar que si c_n es una sucesión racional que tiene límite entonces $f_n = f(c_n)$ también tiene límite.
   3) Probar que si dos sucesiones racionales d_n, e_n tienen el mismo límite entonces las sucesiones $f_n = f(d_n)$ y $g_n = f(g_n)$ también tienen el mismo límite.

   e) Para definir $f(x)$ en los irracionales tomaremos sucesiones racionales.
   Sea $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, existe a_n una sucesión racional tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = x$ definimos $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$.

   1) Probar que para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ la definicion de f no depende de la sucesión elegida, esto es, si a_n, b_n sucesiones racionales tales que $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = x$ entonces $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n)$.
   2) Veamos que la definición por sucesiones también es coherente en $\mathbb{Q}$.
   Sea a_n sucesión racional tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{Q}$ entonces $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$

   f) Probar que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente.

   g) Probar que si x_n es una sucesión real tal que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ entonces $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$

   h) Probar que $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$

2. Este ejercicio busca dar aproximaciones manejables de ciertos números y funciones.

   Se estudiara como calcular numéricamente una función, con determinadas caracteristicas, esto quiere decir dar aproximaciones suficientemente buenas. Estudiaremos el caso en que la función g en la que estamos interesados tiene una inversa ”facil” de calcular. Usaremos la notación $f = g^{-1}$.

Un ejemplo de esto es la función g es $g:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por $g(x)=\sqrt{x}$ por tanto la función $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ es $f(x)=x^2$.

Las dos claves para el algoritmo que realizaremos en este ejercicio son:

- La función f es fácil de calcular
- La función f es monótona

Notar que ambas, f y g, son crecientes.

a) Probar que si f es creciente, entonces $f^{-1}=g$ también.

b) Probar que si f es decreciente, entonces $f^{-1}=g$ también.

Fijemos el problema entonces en calcular numéricamente $\sqrt{2}$, es decir dar números çercanos". Como el nivel de precisión que se necesite para distintos problemas puede variar lo mejor es dar una sucesión a_n tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n=\sqrt{2}$ y tener una noción de como la distancia entre a_n y $\sqrt{2}$ varia con n. Definiremos a_n por inductivamente por bipartición.

Primero necesitaremos que $a_0 \le \sqrt{2} \le a_1$, cualquier par de números que cumplan eso nos servirían.

Si bien en este caso es sencillo encontrar tales números, una forma mas general de encontrar ejemplos es usando f, pues si queremos aproximar $g(x_0)$ y f es creciente basta con tomar a_0 y a_1 de forma que $f(a_0)\le f(g(x_0))=x_0\le f(a_1)$

Volviendo al ejemplo de $\sqrt{2}$ definimos a_n por inducción

- $a_0=1$
- $a_1=2$
- $a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+\frac{a_1-a_0}{2^{n+1}} & \text{si } a_{n+1}^2\le 2 \\ a_{n+1}-\frac{a_1-a_0}{2^{n+1}} & \text{si } a_{n+1}^2>2 \end{cases}$

Notar que $a_{n+2}\ge a_{n+1}$ si solo si $a_{n+1}^2\le 2$ es decir $a_{n+1}\le\sqrt{2}$

a) Probar que $\lim_{n\to+\infty} a_n=\sqrt{2}$

b) Dar n_0 de forma que $|\,a_n-\sqrt{2}\,|\le\epsilon\ \forall n\ge n_0$ para $\epsilon=10^{-2},10^{-5},10^{-100}$

c) Definimos la sucesión desvio como $b_n=|\,a_n-\sqrt{2}\,|$. ¿Tiene límite la sucesión b_n? ¿Es monótona o eventualmente monótona la sucesión b_n?

d) Reproducir los pasos de este ejercicio para calcular $\log_2(5)$

3. Número e

Se consideran las sucesiones $(a_n),(b_n)$ y (c_n) definidas como:
$a_n:=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i!}$ $\quad b_n:=a_n+\frac{1}{n!n}$ $\quad c_n:=(1+\frac{1}{n})^n$

1. Probar que (a_n) y (b_n) son un par de sucesiones monótononas convergentes.
2. Sea e el límite de las sucesiones (a_n) y (b_n). Acotar el error de aproximar e por a_n. Hallar e con un error menor a 10^6.
3. Probar que e es irracional. Sugerencia: considerar $a_n<e<b_n$. Suponer que e es racional y multiplicar por $n!n$.
4. Probar que $c_n\le a_n$. Sugerencia: desarrollar c_n aplicando el binomio de Newton. Acotar sumando a sumando.

5. Probar que $\forall n \geq 2 \;\; c_n = 2 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i!} x_i$, donde

$$x_i = (1 - 1/n) \dots (1 - (i-1)/n)$$

Probar que $\forall i \geq 2 \;\; x_i \geq (1 - \frac{i-1}{n})^{i-1} \geq 1 - \frac{(i-1)^2}{n}$.

6. Deducir que $c_n \geq a_n - \frac{1}{n} a_{n-2}$. Concluir que $\lim c_n = e$.

4. Aplicaciones

1. Ignacio ingresa a trabajar en la compañía Lala-Lolo LTD en enero de 2006. Su paga, al firmar el contrato, es de \$10,000 al mes. Al comienzo de cada año se realiza una ajuste por IPC + 1 % de aumento de salario real. Si por ejemplo el IPC anualizado es de un 10 % entonces el aumento sera de un 11 %.

   Tabla del IPC anualizado desde 2006 (Datos INE)

Año	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
IPC	6.38	8.50	9.19	5.90	6.93	8.60	7.48	8.52	8.26	9.44

   Notamos a_n la sucesión del sueldo de Ignacio y b_n el IPC en el año n a partir de la firma del contrato, por ejemplo $a_0 = \$10000$, y $b_0 = 6{,}38$

   a) Determinar la sucesión a_n a partir de b_{n-1}, a_{n-1}.

   b) Calcular cuál es el sueldo de Ignacio este año.

Para realizar estos ejercicios, se recomienda leer el material complementario sobre sucesiones que se encuentra disponible en la página del curso.

2. Una taza de café recién servida tiene una temperatura de 82°. Después de 2 minutos en una habitación a 21° el café se enfría hasta 74°. Suponiendo que la temperatura del café en cada minuto n viene dada por $T_n = Ae^{-kn} + 21$, encuentra las constantes A y k. Cuanto tiempo hay que esperar para que el café llegue a una temperatura tolerable de 49°?

3. Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién colocado en una placa de Petri con nutrientes tiene 100 individuos. Al hacer un conteo 60 minutos después se encuentran 450 individuos. Asumiendo un modelo exponencial $P_n = Ae^{kn}$ halle P_n. Cuál es el tiempo de espera hasta que la población se duplique?

4. En un sitio arqueológico se encuentran restos de carbón de una hoguera. El análisis paleobotánico muestra que la madera quemada era Coronilla. Del análisis de árboles de Coronilla vivos en la actualidad, se sabe que la proporción entre el C-14 y el C-16 es de 0,005. Si en una muestra de 4 grs. de carbón la proporción observada entre el C-14 y el C-16 (asumiendo que la muestra fue adecuadamente extraída para evitar su contaminación) es 0.003, cuantos años podemos atribuír a esos restos?

5. Una persona ingiere una pastilla de un analgésico que contiene 100 mgr. de ibuprofeno, cuya vida media en plasma es de 2 horas. Para que el analgésico surta efecto la cantidad de ibuprofeno debe ser de al menos 35 mgr. Calcule el máximo tiempo (en horas) hasta la toma de la siguiente pastilla.

6. Una persona compra un frasco de 250 cc. de un shampoo bastante caro. Cada vez que lo usa utiliza la tapa del frasco como medida (10 cc.), poniéndose una tapa del mismo. Para que le dure más tiempo, luego de ponerse el shampoo repone lo que sacó con agua. Esto es, saca una tapa de shampoo para usar y pone una tapa de agua en el frasco. Suponiendo que cuando la concentración sea un tercio de la inicial el producto ya no hace efecto, cuántas veces podrá reponer con agua antes de que el shampoo ya no surta efecto?

7. Una empresa entrevista a dos candidatos para un trabajo que requiere procesar un cierto producto. En dicha entrevista cada candidato debe hacer una práctica en lo que sería su futuro trabajo. El candidato A procesa 25 unidades en la primera hora y 45 en la segunda, mientras que el candidato B procesa 35 unidades en la primera hora y 50 en la segunda. Asumiendo que ambos candidatos no tienen ninguna experiencia previa en dicho proceso, calcule el máximo de unidades por hora que cada uno puede llegar a procesar. Basado en esta información, a cual de los dos candidatos contrataría?

5. Ejercicios Complementarios

1. Algunos de los mitos sobre el orígen del Ajedrez introducen el problema de la progresión aritmetica.

   Cuando el creador del juego del ajedrez (en algunos mitos Sissa) le mostró su invento el rey de un lejano país de medio oriente quedo tan deslumbrado por el mismo que otorgó al mismo Sissa la desición sobre la recompensa por tal creación.

   Sissa decidió que su recompensa debía ser la siguiente, recibiría un grano de trigo por la primer casilla del tablero, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente, duplicando la cantidad cada vez. El Rey aceptó el pedido incluso ofendido por lo que él creía, poco de la recompensa.

   Calcule aproximadamente la cantidad de trigo que le correspondería a Sissa.

   Tomando al estimación de que en un kilo de trigo hay 1200 granos y la producción en el mundo en 2014-2015 es aproximadamente 697 035 000 toneladas, compare con la recompenza pedida. ¿Qué conclusiones puede obtener?

2. Sea X un conjunto de números reales. Decimos que X es **completo** si toda sucesión de Cauchy de elementos de X converge a un punto de X.

   Determinar si son completos los siguientes conjuntos:

$$A = [0,3] \quad B = (0,3) \quad C = [0,1) \cup (1,3] \quad D = [0,1] \cup [2,3]$$

3. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   a) En la recta real, dado cualquier subconjunto acotado H se cumple que para toda sucesión (a_n) tal que $a_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existen subsucesiones convergentes de (a_n) cuyo límite $a \in H$.

   b) En la recta real, dado cualquier subconjunto completo y acotado H se cumple que para toda sucesión (a_n) tal que $a_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$ existen subsucesiones convergentes de (a_n) cuyo límite $a \in H$.

   c) En la recta real, dado cualquier subconjunto completo H, y cualquier sucesión (a_n) tal que $a_n \in H$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se cumple que todas las subsucesiones de (a_n) que son convergentes tienen su límite $a \in H$.