Inducción

Lógica 2017

Instituto de Computación

3 de marzo

Inducción - Plan

Conjuntos inductivos

Inducción como mecanismo primitivo para definir conjuntos

Pruebas inductivas

Principios de inducción asociados a los conjuntos inductivos como mecanismo de prueba

Definiciones recursivas

- Esquemas de recursión primitiva como mecanismo de definición de funciones sobre conjuntos inductivos
- Esquema de recursión general

Conjuntos inductivos

Formas de definir conjuntos

Por extensión

Dando cada uno de los elementos del conjunto.
Ej: $A = \{0, 2, 4\}$

Por comprensión

Dando una condición que deben cumplir los elementos del conjunto.
Ej: $B = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ es par y } x < 5\}$

Por inducción

Mediante reglas.

Definición inductiva de conjuntos

Idea

- Asumir un cierto universo.
- Elegir ciertos elementos individuales del universo como elementos básicos del conjunto.
- Agregar nuevos elementos al conjunto combinando los elementos agregados anteriormente.

Las definiciones se escriben como reglas que debe cumplir el conjunto que se está definiendo.

Definición inductiva de conjuntos

¿Cómo definir los naturales?

- Indicando el universo en el que nos paramos.
- Dando una regla que diga que 0 es un natural.
- Dando otra regla que diga que si tenemos un natural n, se puede construir otro natural aplicando el operador sucesor (o sumando 1).

Definición inductiva de los naturales.

Se define $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ con las siguientes reglas:

1. $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Diferentes visiones

Visión declarativa

Se considera la familia de subconjuntos del universo que cumplen con las reglas.
El conjunto inductivo definido es la intersección de dicha familia.

Visión constructiva

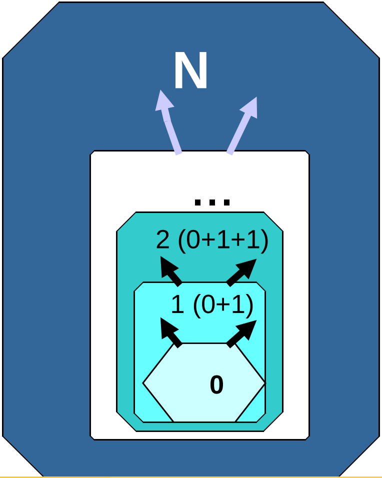
Las reglas identifican elementos del universo a partir de ciertos elementos básicos y de mecanismos que usan otros elementos previamente identificados.
El conjunto inductivo definido está formado por todos los elementos identificados en ese proceso.

Visión declarativa de las definiciones inductivas

- Dado un grupo de reglas, hay varios subconjuntos del universo que cumplen con ellas.
- ¿Cuál de todos esos es el que se está definiendo?
- Se define el *mínimo* conjunto que cumple con las reglas.
- O lo que es lo mismo la intersección de todos los conjuntos que cumplen con las reglas.

Visión constructiva de una definición inductiva

- Dado un conjunto inicial B, se aplican las reglas y se agranda B.
- El conjunto que se define es el de todos los elementos que se pueden construir con la reglas.
- Este conjunto cumple con las reglas dadas.



Significado de una definición inductiva

Cuando damos una definición inductiva de un conjunto :

1. Consideramos un universo
2. Identificamos un conjunto básico
3. Definimos una manera de recorrer (construir) sus elementos
4. Todos los elementos del conjunto se recorren con las reglas dadas
5. El orden al aplicar las reglas es relevante, dado que un orden distinto puede dar (y en general lo hace) elementos distintos

Ejemplo: los pares P

Consideremos las siguientes reglas para definir un subconjunto de $\mathbb{R}$:

1. $0 \in P$
2. Si $n \in P$, entonces $n + 2 \in P$,

Queda definido inductivamente el conjunto P de los pares

- $P = \{0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

El conjunto base es el conjunto $\{0\}$.

Ejemplo: los pares P'

Consideremos las siguientes reglas para definir un subconjunto de $\mathbb{R}$:

1. $0 \in P'$
2. $2 \in P'$
3. $n + 4 \in P'$, si $n \in P'$

Queda definido inductivamente el conjunto P' de los pares
El conjunto base es el conjunto $\{0, 2\}$.

Pares: P versus P'

Con respecto al significado de las definiciones:

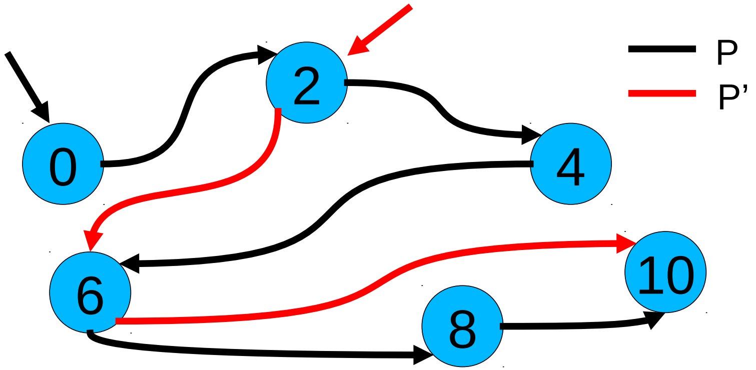
- Definimos dos conjuntos P y P'.
- Pero sus definiciones inductivas son distintas, porque las formas de recorrer son diferentes.
- Todos los elementos de ambos conjuntos son generados exclusivamente por las reglas, y son los mismos.

P versus P'

¿Cómo se demuestra que 10 es par en términos de los conjuntos que manejamos?

- Se construye el 10 de P
- Se construye el 10 de P'

P versus P'



Tiempo y/o Tamaño

- ¿Cuántas aplicaciones de reglas (qué tamaño) tiene el 10?
  - En P: 0, 2, 4, 6, 8, 10
  - En P': 2, 6, 10
- Distintas definiciones inductivas llevan a funciones con distinto costo en el cómputo.
- El tamaño de un objeto puede ser distinto en función de reglas distintas para definir el conjunto.
- Un elemento complejo, siempre se compone de elementos más chicos o menos complejos.

Resumen: Definición inductiva de un conjunto

- Se define inductivamente el conjunto como el menor conjunto que cumple con las reglas.
- En el caso de los pares, subconjunto de los reales:
  1. 0 está en P
  2. Si n está en P, entonces $n+2$ tambien lo está
- También se puede ver como reglas de construcción de los elementos del conjunto y por lo tanto del propio conjunto.

Ejemplos numéricos incluídos en $\mathbb{R}$

Naturales

I $0 \in \mathbb{N}$

II Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$

Pares

I $0 \in \mathbb{N}$

II Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 2 \in \mathbb{N}$

Impares

I $1 \in \mathbb{N}$

II Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 2 \in \mathbb{N}$

Observar que:
En las reglas inductivas, las metavariables (n en este caso) representan elementos que necesitan menos reglas para su construcción.

Universo de las palabras de Σ

- Sea Σ un conjunto conocido de cosas distinguibles (símbolos, letras, marcas)
- Una palabra (o secuencia, o tira, o string) sobre Σ es una secuencia finita de elementos de Σ
- Dadas dos palabras u y w, la palabra uw es la que resulta de encadenar ambas
- Existe una palabra vacía ϵ, que no tiene ninguna letra, y es el neutro del encadenamiento
- Llamamos Σ^* al conjunto de todas las palabras formadas por elementos de Σ

Lenguajes sobre un alfabeto Σ

- Se llama *lenguaje sobre* Σ a cualquier subconjunto de Σ^*
- Hay lenguajes que se pueden definir inductivamente y tratar como conjuntos inductivos.

Ejemplos

$L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ definido inductivamente por

1. $a \in L_1$
2. si $w \in L_1$ entonces $bwb \in L_1$

Es el conjunto de las tiras que tienen una sóla a y la misma cantidad de b antes y después de la a.

$L_2 \subseteq \{a, b, c\}^*$ definido inductivamente por

1. $b \in L_2$
2. Si $w \in L_2$ entonces $awc \in L_2$

$\{a, b\}^*$ puede definirse inductivamente

- Sea el alfabeto $\{a, b\}$
- Definimos inductivamente $S \subseteq \{a, b\}^*$ con las siguientes cláusulas:
  1. $\epsilon \in S$ (palabra vacía)
  2. Si $w \in S$, entonces $aw \in S$
  3. Si $w \in S$, entonces $bw \in S$
- El lenguaje S es precisamente $\{a, b\}^*$
- ¡Observar que ϵ es una palabra y no un símbolo del alfabeto!

Σ^*

Definimos inductivamente $S \subseteq \Sigma^*$ con las siguientes cláusulas:

1. $\epsilon \in S$ (palabra vacía)
2. Si $w \in S$ y $a \in \Sigma$, entonces $aw \in S$

El lenguaje S es precisamente Σ^*

Pertenencia a un conjunto inductivo

Para probar que un objeto pertenece a un conjunto inductivo basta con mostrar cómo lo formamos (su *secuencia de formación* está dada por las cláusulas utilizadas)

Ejemplo: $bbabb \in L_1$ porque

1. $a \in L_1$ por i)
2. luego $bab \in L_1$ por ii)
3. y finalmente $bbabb \in L_1$ por ii)

Pruebas inductivas

Probar propiedades de conjuntos

Hay dos formas típicas de definir conjuntos

- Por extensión
- Por comprensión

Cada forma induce una forma de probar propiedades sobre el conjunto

Por extensión Se prueba que cada uno de los elementos del conjunto cumple la propiedad

Por comprensión Se prueba que los elementos que cumplen con la definición del conjunto cumplen la propiedad

Principio de inducción

Sabemos exactamente cómo se construyen los elementos de un conjunto inductivo. Podemos usar esta información para probar propiedades de ellos.

Todos los elementos de L_1 tienen una cantidad impar de símbolos

Una prueba que aprovecha el conocimiento de cómo se generan los objetos de L_1 sería de la forma:

I a tiene una cantidad impar de símbolos

II Si w tiene una cantidad impar de símbolos, entonces bwb también

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ definido inductivamente por:

I $0 \in \mathbb{N}$

II Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $S(n) \in \mathbb{N}$

Principio de Inducción Primitiva para $\mathbb{N}$

Sea P una propiedad sobre los elementos de $\mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

I $P(0)$ se cumple

II Si $P(n)$ se cumple, entonces $P(S(n))$ se cumple

Entonces, P se cumple para todos los elementos de $\mathbb{N}$.

Principio de Inducción Primitiva para $\mathbb{N}$

Hipótesis Sea P una propiedad sobre los elementos de $\mathbb{N}$ que cumple lo siguiente:

- I $P(0)$ se cumple
- II Si $P(n)$ se cumple, entonces $P(S(n))$ se cumple

Tesis $P(n)$ se cumple para cualquier $n \in \mathbb{N}$

Demostración

1. Sea $X = \{x \in \mathbb{N} | P(x)\}$
2. Por hip., P cumple i y ii, lo que significa que X cumple las reglas que definen a $\mathbb{N}$
3. Como $\mathbb{N}$ es el *mínimo* conjunto que cumple con esas reglas entonces $\mathbb{N} \subseteq X$
4. Entonces todos los naturales cumplen P

Aplicación del Principio de Inducción

Para aplicar el PIP, se debe probar que la propiedad a demostrar está en las hipótesis del PIP.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{0 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Hay que probar que se cumplen las hipótesis del PIP. O sea,

I $\sum_{0 \leq k \leq 0} k = \frac{0(0+1)}{2}$

II si $\sum_{0 \leq k \leq n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces $\sum_{0 \leq k \leq n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Y luego aplicando el PIP, concluir que todo $n \in \mathbb{N}$ lo cumple.

Principio de Inducción Primitiva para un conjunto inductivo

Sea A un conjunto definido inductivamente. Para probar que una propiedad se cumple para todos los objetos de A es suficiente con

- Probar que la propiedad se cumple para los objetos de A obtenidos de aplicar cláusulas base
- Probar que la propiedad se cumple para los objetos de A obtenidos de aplicar cláusulas inductivas, suponiendo que la misma se cumple para el (los) objeto(s) anterior(es) (*hipótesis inductiva*)

$L_1 \subseteq \{a, b\}^*$ definido inductivamente por

1. $a \in L_1$
2. si $w \in L_1$ entonces $bwb \in L_1$

Principio de Inducción Primitiva para L_1

Sea P una propiedad sobre los elementos de L_1 que cumple lo siguiente:

I. $P(a)$ se cumple

II. Si $P(w)$ se cumple, entonces $P(bwb)$ se cumple

Entonces, P se cumple para todos los elementos de L_1.

Aplicaciones

- Probar que todos los elementos de L_1 tienen una cantidad impar de símbolos
- Probar que todos los elementos de L_1 son palíndromos

Σ^* definido inductivamente por:

I. $\epsilon \in \Sigma^*$

II. Si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$, entonces $xw \in \Sigma^*$

Principio de Inducción Primitiva para Σ^*

Sea P una propiedad sobre los elementos de Σ^* que cumple lo siguiente:

I. $P(\epsilon)$ se cumple

II. Si $P(w)$ se cumple y $x \in \Sigma$, $P(xw)$ se cumple

Entonces, P se cumple para todos los elementos de Σ^*.