Deducción Natural en los Lenguajes de Primer Orden

Deducción Natural

- Definimos inductivamente el conjunto DER_P de las derivaciones de la lógica de predicados.
- Caso base: derivación trivial (idem PROP)
- Para los conectivos: las mismas reglas de introducción y eliminación que en PROP
- Para los cuantificadores ($\forall$ y $\exists$) se agregan reglas de introducción y eliminación

Cómo probar un para todo?

H) $\delta_1 \ldots \delta_n$

T) Para todo x vale α

<u>Dem</u>

•Sea x arbitrario (no se puede suponer nada sobre x)

Probamos α

(usamos... $\delta_1 \ldots \delta_n$ ...)

Luego, α se cumple para todo x

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}}{(\forall x)\,\alpha}\ (I_\forall)\ (**)$$

(**) La noción de *x arbitrario* se expresa sintácticamente por: *x no ocurre libre en las hipótesis no canceladas de* $\begin{array}{c}\delta_1. \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha\end{array}$

Cómo utilizar un para todo?

H) $\delta_1 \ldots \delta_n$

T) t tiene la propiedad α

<u>Dem</u>

•Probamos que para todo x vale α.

(usamos... $\delta 1$ ... δn ...)

Luego, en particular,

α vale para t.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1 \ldots \delta_n \\ \ldots \\ (\forall x)\ \alpha\end{array}}{\alpha\,[t/x]}\ (E_\forall)\ (*)$$

(*) Para poder realizar la sustitución: t debe estar libre para x en α

Cómo probar un existe?

H) $\delta_1 \ldots \delta_n$

T) Existe un x para el cual se cumple α

<u>Dem</u>

- Probamos que α vale para t

 (usamos... δ_1 ... δ_n ...)

Luego, existe un x para el cual vale α.

$$\frac{\begin{array}{c}\delta_{1.} \ldots \delta_n \\ \ldots \\ \alpha[t/x]\end{array}}{(\exists x)\ \alpha}\ (I_\exists)$$

(*) Para poder realizar la sustitución: t debe estar libre para x en α

Cómo utilizar un existe?

H) $\delta_1. \ldots\delta_n, (\exists x)\alpha$

T) β

<u>Dem</u>

- Probamos β .

  (usamos.. δ_1.. δ_n.. y

  α para un x arbitrario)

Luego β

$$\dfrac{(\exists x)\alpha \qquad \begin{matrix} \delta_1 \ldots \delta_n \ \cancel{\alpha(x)} \\ \ldots \\ \beta \end{matrix}}{\beta} \ (E_\exists)(**)$$

(**) el único supuesto que se asume sobre x en la prueba es que se cumple $\alpha(x)$.

Esto se expresa como: x no ocurre libre ni en $\delta_1. \ldots\delta_n$ ni en β

Derivaciones - DER_P

Def [DER_P]

El conjunto DER_P de las derivaciones de la lógica de predicados se define inductivamente como sigue:

HIP) Si $\varphi \in$ FORM entonces $\varphi \in DER_P$

$\wedge_I$) **Si** $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \in DER_P$ **y** $\begin{array}{c} D' \\ \psi \end{array} \in DER_P$ **entonces** $\dfrac{\begin{array}{cc} D & D' \\ \varphi & \psi \end{array}}{\varphi \wedge \psi} \in DER_P$

($\wedge_{E1}$) ($\wedge_{E2}$) ($\vee_{I1}$) ($\vee_{I2}$) ($\vee_E$) ($\to_I$) ($\to_E$) ($\neg_I$) ($\neg_E$) ($\leftrightarrow_I$) ($\leftrightarrow_{E1}$) ($\leftrightarrow_{E2}$)($\perp_E$) (RAA) se definen de la misma forma que para DER en lógica proposicional.

Der_p: $\forall$

$\forall_I$) Si $\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array} \in \mathrm{DER}_P$ y $x \notin FV(H(D))$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ \varphi \end{array}}{(\forall x)\varphi} \in \mathrm{DER}_P$

$\forall_E$) Si $\begin{array}{c} D \\ (\forall x)\varphi \end{array} \in \mathrm{DER}_P$ y t está libre para x en φ, entonces

$$\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\forall x)\varphi \end{array}}{\varphi[t/x]} \in \mathrm{DER}_P$$

Der_p: $\exists$

$\exists_I$) Si $\begin{array}{c} D \\ \varphi\,[t/x] \end{array} \in DER_P$ y t está libre para x en φ, , entonces

$$\frac{\begin{array}{c} D \\ \varphi[t/x] \end{array}}{(\exists x)\varphi} \in DER_P$$

$\exists_E$) Si $\begin{array}{c} D \\ (\exists x)\varphi \end{array} \in DER_P$ y $\begin{array}{c} \varphi \\ D' \\ \Psi \end{array} \in DER_P$ tales que:

$x \notin FV(H(D')-\{\varphi\}) \cup FV(\Psi)$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c} D \\ (\exists x)\varphi \end{array} \quad \begin{array}{c} \cancel{\varphi} \\ D' \\ \Psi \end{array}}{\Psi} \in DER_P$

Consecuencia Sintáctica

Def [consecuencia sintáctica]

Sea $\Gamma \subseteq$ FORM y $\varphi \in$ FORM. Decimos que φ es consecuencia sintáctica de Γ o que φ se deriva de Γ ssi existe $D \in DER_P$ tal que :

$C(D) = \varphi$ y

$H(D) \subseteq \Gamma$

<u>Notación</u>:

$\Gamma \mid\!- \varphi$ se lee "φ se deriva de Γ"

$\varnothing \mid\!- \varphi$ se lee "φ es teorema"; se escribe $\mid\!- \varphi$

Ejemplos

$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\ \alpha \rightarrow (\forall x_2)(\forall x_1)\ \alpha$

$\vdash (\exists x_1)(\exists x_2)\ \alpha \rightarrow (\exists x_2)(\exists x_1)\ \alpha$

$\vdash (\forall x_1)(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\forall x_1)\alpha \wedge (\forall x_1)\beta$

$\vdash (\exists x_1)(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\exists x_1)\alpha \vee (\exists x_1)\beta$

$\vdash (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\exists x)\beta)$

$\vdash (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\beta)$, si $x \notin FV(\alpha)$

Restricciones sobre las variables

Porqué las restricciones en las reglas de ∀ y ∃?

- Sin las restricciones, las reglas permiten construir derivaciones que corresponden a razonamientos incorrectos.
- Ejemplos:

$\vdash \underline{c}_1 =‘ \underline{c}_1 \rightarrow (\forall x)\, x =‘ \underline{c}_1$

$\vdash (\forall x)\, \neg(\forall y)\, x =‘ y \;\rightarrow \neg(\forall y)\, y =‘ y$

Propiedades de los cuantificadores

<u>Lema</u> [**propiedades de derivabilidad del $\forall$**]

- Si $\Gamma \vdash \varphi$ y $x \notin FV(\Gamma)$ entonces $\Gamma \vdash (\forall x)\,\varphi$
- Si $\Gamma \vdash (\forall x)\varphi$ y t libre para x en φ, entonces $\Gamma \vdash \varphi\,[t/x]$

<u>Lema</u> [**propiedades de derivabilidad del $\exists$**]

- Si t es libre para x en φ entonces $\varphi[t/x] \vdash (\exists x)\varphi$
- Si $x \notin FV(\psi) \cup FV(\Gamma)$ entonces,

  si $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ luego $\Gamma, (\exists x)\varphi \vdash \psi$

$\varphi(\tilde{a})$, $\Gamma(\tilde{a})$

Para poder probar consistencia, debemos extender la definición de $\models$ a todo FORM:

<u>Def</u> [ã, Γ(ã)]

Sean $\Gamma \subseteq$ FORM, $\varphi \in$ FORM y $\{x_{i1}, x_{i2}, \ldots\} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma \cup \{\varphi\}} FV(\alpha)$

Sea $\mathcal{M}$ una estructura.

Si ã es una secuencia $(a_1, a_2, \ldots)$ de elementos de $|\mathcal{M}|$ (eventualmente repetidos), entonces Γ(ã) y φ(ã) se obtienen de Γ y φ sustituyendo simultáneamente en todas las fórmulas de Γ y en φ los x_{ij} por los a_j $(j \geq 1)$

(➔observar que pueden ser infinitos)

$M \models \Gamma(\tilde{a})$ - $\Gamma \models \varphi$

Intuitivamente, $\Gamma \models \varphi$ vale sólo si, para todas las estructuras $\mathcal{M}$ y todas las posibles asignaciones ã (en $|\mathcal{M}|$) de valores a las variables libres de Γ y de φ, se verifica que: si las hipótesis en $\Gamma(\tilde{a})$ son ciertas, entonces también es cierta $\varphi(\tilde{a})$

<u>Def</u> 2.8.1 [$\mathcal{M} \models \Gamma(\tilde{a})$ y $\Gamma \models \varphi$]

i) $\mathcal{M} \models \Gamma(\tilde{a})$ si para todo $\alpha \in \Gamma(\tilde{a})$ se cumple $\mathcal{M} \models \alpha$

ii) $\Gamma \models \varphi$ ssi

para toda estructura $\mathcal{M}$ y para toda secuencia ã en $|\mathcal{M}|$,

si $\mathcal{M} \models \Gamma(\tilde{a})$ entonces $\mathcal{M} \models \varphi(\tilde{a})$

<u>Obs</u>: Esta definición generaliza la definición 2.2.4. Que se aplica sólo si $\Gamma \subseteq$ SENT y $\varphi \in$ SENT.

Corrección de DER_P

<u>Lema</u> 2.8.2 [corrección de DER_P]

Si $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$

<u>Aplicaciones</u>

Demostrar que:

$$\nvdash (\forall x)\, (\exists y)\, \varphi \rightarrow (\exists y)\, (\forall x)\, \varphi$$

$$(\forall x)\, P(x,x),\ (\forall yx)\, (P(x,y) \rightarrow P(y,x)) \nvdash (\forall xyz)\, (P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$$