
Sintaxis y Propiedades

Estructuras

Def 2.2.1 [estructura]

Una estructura es una secuencia ordenada

$$\mathcal{M} = \langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{c_i \mid i \in I\} \rangle$$

tal que:

- A es un conjunto no vacío, (Notación: $A = |\mathcal{M}|$)
- R_1, \dots, R_n son relaciones sobre A ($n \geq 0$)
- F_1, \dots, F_m son funciones en A ($m \geq 0$)
- c_i ($i \in I$) son elementos distinguidos de A

Ejemplos:

- $\langle \mathbb{N}, \text{Par}, \leq, +, *, 0, 1 \rangle$ naturales
 - $\langle \mathbb{N}, < \rangle$ CPO de los naturales
 - $\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ grupo de los enteros
-

Tipo de Similaridad

Def 2.2.2 [tipo de similaridad de una estructura]

El tipo de similaridad de $\langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{c_i \mid i \in I\} \rangle$ es una secuencia $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ tal que:

- $R_i \subseteq A^{r_i}$ ($1 \leq i \leq n$ y $r_i \geq 0$)
- $F_j : A^{a_j} \rightarrow A$ ($1 \leq j \leq m$ y $a_j \geq 0$)
- $k = | \{c_i \mid i \in I\} |$ (el cardinal del conjunto $\{c_i \mid i \in I\}$)

Ejemplos:

$\langle \mathbb{N}, \text{Par}, \leq, +, *, 0, 1 \rangle$ tiene tipo $\langle 1, 2 ; 2, 2 ; 2 \rangle$

$\langle \mathbb{N}, < \rangle$ tiene tipo $\langle 2 ; - ; 0 \rangle$

$\langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ tiene tipo $\langle - ; 2, 1 ; 1 \rangle$

Alfabeto de Primer Orden

Def [alfabeto de un lenguaje de primer orden]

Un alfabeto para un lenguaje de primer orden de tipo $\langle r_1, \dots, r_n; a_1, \dots, a_m; k \rangle$ consiste de los siguientes símbolos:

- Símbolos de relación: $P_1, P_2, \dots, P_n, =$
- Símbolos de función: f_1, f_2, \dots, f_m
- Símbolos de constantes: c_i tal que $i \in I$ y $|I| = k$
- Variables: x_1, x_2, x_3, \dots
- Conectivos : $\rightarrow, \leftrightarrow, \neg, \wedge, \vee, \perp$
- Cuantificadores: \forall, \exists
- Auxiliares : $() ,$

Términos

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i$ ($i \in I$) de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def 2.3.1 [términos de un lenguaje de primer orden]

- El conjunto $TERM_A$ de los términos del lenguaje de primer orden con alfabeto A se define inductivamente por:
 - i) $x_i \in TERM_A$ ($i \in \mathbb{N}$)
 - ii) $c_i \in TERM_A$ ($i \in I$)
 - iii) si $t_1 \dots t_{a_i} \in TERM_A$, entonces $f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) \in TERM_A$

Fórmulas

-
- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i$ ($i \in I$) de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def 2.3.2 [FORM]

- El conjunto $FORM_A$ de las fórmulas del lenguaje de primer orden con alfabeto A se define inductivamente por:
 - i) $\perp \in FORM_A$
 - ii) Si $t_1 \dots t_{r_j} \in TERM_A$, entonces $P_j(t_1 \dots t_{r_j}) \in FORM_A$
 - iii) Si $t_1, t_2 \in TERM_A$, entonces $t_1 = t_2 \in FORM_A$
 - iv) Si $\alpha, \beta \in FORM_A$ entonces $(\alpha \square \beta) \in FORM_A$ para $\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$
 - v) Si $\alpha \in FORM_A$ entonces $(\neg \alpha) \in FORM_A$
 - vi) Si $\alpha \in FORM_A$ entonces $((\forall x_i)\alpha)$ y $((\exists x_i)\alpha) \in FORM_A$

Ejemplos de Términos y Fórmulas

Sea A un alfabeto $P_1, P_2, f_1, f_2, c_1, c_2$ de tipo $\langle 1, 2; 1, 2; 2 \rangle$

- $f_2(c_1, x_4) \in \text{TERM}_A$?
- $f_1(c_1, x_4) \in \text{TERM}_A$?
- $((\forall x_1) P_2(f_1(x_1), c_1)) \rightarrow ((\exists x_2) P_1(x_2)) \in \text{FORM}_A$?
- $((\exists x_2) f_2(x_1, c_2)) \in \text{FORM}_A$?
- $((\forall x_1) P_1(x_1, c_1)) \in \text{FORM}_A$?
- $((\exists x_1) ((\exists x_2) ((\exists x_3) P_3(x_1, x_2, x_3)))) \in \text{FORM}_A$?

!!!OJO!!!

¡No confundir símbolo de predicado y símbolo de función!

$f_2(x_1, c_2) \in \text{TERM}$ y $P(x_1) \in \text{FORM}$

Reglas de parentización

- Para simplificar la escritura de las fórmulas, omitimos ciertos paréntesis:
 - Las reglas de precedencia de conectivos son las mismas que para PROP
 - Conectivos de igual precedencia se asocian a la derecha
 - Cuantificadores: el \forall y el \exists tienen igual precedencia que el \neg

Reglas de Parentización: ejemplos

Atención: No confundir las siguientes fórmulas

$$\begin{array}{l} (\forall x)(\alpha \rightarrow \beta) \quad y \quad (\forall x)\alpha \rightarrow \beta \\ (\exists x)(\alpha \rightarrow \beta) \quad y \quad (\exists x)\alpha \rightarrow \beta \end{array}$$

Ejemplo: Parentizar la siguiente expresión:

$$\begin{array}{l} (\forall x) P_1(x) \wedge \perp \rightarrow \perp \vee \neg P_1(x) \\ ((\forall x) P_1(x)) \wedge \perp \rightarrow \perp \vee \neg P_1(x) \\ (((\forall x) P_1(x)) \wedge \perp) \rightarrow \perp \vee \neg P_1(x) \\ (((\forall x) P_1(x)) \wedge \perp) \rightarrow \perp \vee (\neg P_1(x)) \\ (((\forall x) P_1(x)) \wedge \perp) \rightarrow (\perp \vee (\neg P_1(x))) \\ (((((\forall x) P_1(x)) \wedge \perp) \rightarrow (\perp \vee (\neg P_1(x)))))) \end{array}$$

Var, Const, AT

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i (i \in I)$ de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def [Var]

- Var es el conjunto de las variables de $(\{x_i | i \in \mathbb{N}\})$.

Def [Const_A]

- Const_A es el conjunto de los símbolos de constante de A $(\{c_i | i \in I\})$.

Def [fórmulas atómicas, AT_A]

- AT_A es el conjunto de fórmulas de FORM_A que se obtienen con las cláusulas base $(\perp, P_j(t_1, \dots, t_{r_j}), t_1 = t_2)$.

Principio de Inducción Primitiva para TERM

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i$ ($i \in I$) de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Lema 2.3.3 [principio de inducción para $TERM_A$]

Sea P una propiedad sobre $TERM_A$.

- Si se cumple:
 - i) $P(x)$ para todo $x \in Var$.
 - ii) $P(c)$ para todo $c \in Const_A$.
 - iii) si $P(t_1) \dots P(t_{a_i})$ entonces $P(f_i(t_1, \dots, t_{a_i}))$ para todo $1 \leq i \leq m$

Entonces para todo $t \in TERM_A$ se cumple $P(t)$

Principio de Inducción Primitiva para FORM

Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i$ ($i \in I$) de tipo
 $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Lema 2.3.4 [principio de inducción para FORM_A]

Sea P una propiedad sobre FORM_A .

- Si se cumple:
 - i) $P(\alpha)$ para todo α atómico.
 - ii) si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$ entonces $P(\alpha \square \beta)$ ($\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$)
 - iii) si $P(\alpha)$ entonces $P(\neg \alpha)$
 - iv) si $P(\alpha)$ entonces $P((\forall x)\alpha)$ y $P((\exists x)\alpha)$ para todo $x \in \text{Var}$.

Entonces para todo $\alpha \in \text{FORM}_A$ se cumple $P(\alpha)$

Alcance de cuantificadores

Def [alcance o radio de acción]

- El alcance del cuantificador $\forall x$ en la fórmula $((\forall x)\alpha)$ es la fórmula α .
- El alcance del cuantificador $\exists x$ en la fórmula $((\exists x)\alpha)$ es la fórmula α .

$$(\forall x_1) P_1(x_1) \rightarrow (\forall x_2) P_2(x_1, x_2)$$
$$(\forall x_2) ((\forall x_1) (P_1(x_1) \rightarrow P_2(x_1, x_2)))$$

Variables Libres y Ligadas

Def [ocurrencias libres y ligadas]

- Una ocurrencia de una variable x en α es ligada si se encuentra bajo alcance de un cuantificador $(\forall x)$ o $(\exists x)$, o si es la variable de un cuantificador $(\forall x)$ o $(\exists x)$.
- Si una ocurrencia de una variable x no es ligada en α en se dice que es una ocurrencia libre.

Def [variables libres y ligadas]

- Una variable x es ligada en α si x tiene alguna ocurrencia ligada en α . Una variable x es libre en α si x tiene alguna ocurrencia libre en α .

Ocurrencias Libres y Ligadas

Ejemplos

$$((\forall x_1) P_1(x_1)) \rightarrow (\forall x_2) P_2(x_1, x_2)$$

Ocurrencia ligada Ocurrencia libre

$$(\forall x_1) P_1(c_1)$$

Ocurrencia ligada

Variables Libres y Ligadas

Ejemplo

Sea $\alpha = (\forall x_1) P_1(x_1) \rightarrow (\forall x_2) P_2(x_1, x_2)$

- x_1 tiene 2 ocurrencias ligadas en α
 - entonces x_1 es ligada en α
- x_1 tiene 1 ocurrencia libre en α
 - entonces x_1 es libre en α

Obs:

- una ocurrencia de variable en una fórmula es o bien libre o bien ligada (¡no ambas!)
- una variable puede ser libre y ligada en una misma fórmula

Esquema de Recursión Primitiva para Term

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i$ ($i \in I$) de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Lema [esquema de recursión primitiva para $TERM_A$]

- Sean las siguientes funciones:
 - $H_b: \text{Var} \cup \text{Const}_A \rightarrow B$
 - $H_i: (\text{TERM}_A \times B)^{a_i} \rightarrow B$, con $i \in \{1, \dots, m\}$

Entonces existe una única función $F: \text{TERM}_A \rightarrow B$ tal que:

- $F(t) = H_b(t)$ si $t \in \text{Var} \cup \text{Const}_A$
- $F(f_i(t_1, \dots, t_{a_i})) = H_i(t_1, F(t_1), \dots, t_{a_i}, F(t_{a_i}))$

Esquema de Recursión Primitiva para FORM

Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i (i \in I)$ de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Lema [esquema de recursión primitiva para FORM_A]

Sean las siguientes funciones:

$$H_{at}: AT_A \rightarrow B$$

$$H_{\square} : (FORM_A \times B)^2 \rightarrow B \quad (\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\})$$

$$H_{\neg} : FORM_A \times B \rightarrow B$$

$$H_{\forall}, H_{\exists} : Var_A \times FORM_A \times B \rightarrow B$$

Entonces, existe una única función $F: FORM_A \rightarrow B$ tal que

$$F(\alpha) = H_{at}(\alpha) \quad \text{si } \alpha \in AT_A$$

$$F(\alpha \square \beta) = H_{\square}(\alpha, F(\alpha), \beta, F(\beta)) \quad (\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\})$$

$$F(\neg \alpha) = H_{\neg}(\alpha, F(\alpha))$$

$$F((\forall x) \alpha) = H_{\forall}(x, \alpha, F(\alpha))$$

$$F((\exists x) \alpha) = H_{\exists}(x, \alpha, F(\alpha))$$

Variables de un Término

Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i (i \in I)$ de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def 2.3.6 [conj. de variables (libres) de un término]

Definimos $FV : \text{TERM}_A \rightarrow \mathcal{P}(\text{Var})$ recursivamente en TERM_A :

$$FV(x) = \{ x \} \quad \text{si } x \in \text{Var}$$

$$FV(c_i) = \emptyset$$

$$FV(f_i(t_1, \dots, t_{a_i})) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_{a_i}).$$

Variables de una Fórmula

Def 2.3.7 [conj. de variables libres de una fórmula]

- Definimos $FV:FORM_A \rightarrow P(Var)$ recursivamente en $FORM_A$:
 - $FV(\perp) = \emptyset$
 - $FV(P_j(t_1, \dots, t_{r_j})) = FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_{r_j})$
 - $FV(t_1 = t_2) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$
 - $FV(\alpha \square \beta) = FV(\alpha) \cup FV(\beta) \quad (\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\})$
 - $FV(\neg \alpha) = FV(\alpha)$
 - $FV((\forall x)\alpha) = FV((\exists x)\alpha) = FV(\alpha) - \{x\}$

Ejercicio: Definir recursivamente en $FORM_A$ la función $BV:FORM_A \rightarrow P(Var)$ que calcula el conjunto de variables ligadas de una fórmula

Terminos y Fórmulas Cerrados

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i (i \in I)$ de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def 2.3.8 [términos y fórmulas cerradas]

- Un término t es *cerrado* si $FV(t) = \emptyset$.
- Una fórmula α es *cerrada* si $FV(\alpha) = \emptyset$. También se dice en este caso que α es una *sentencia*.
- Una fórmula α es *abierta* si no tiene cuantificadores.

Notación:

$$TERM_{c_A} = \{t \in TERM_A \mid t \text{ es cerrado}\}$$

$$SENT_A = \{\alpha \in FORM_A \mid \alpha \text{ es cerrada}\}$$

Sustituciones en TERM y en FORM

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i$ ($i \in I$) de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def 2.3.9 [sustitución de términos en términos]

- Sean $s, t \in \text{TERM}_A$ y $x_j \in \text{VAR}$. Definimos $s[t/x_j]$ del siguiente modo:

$$\text{i. } x_i [t/x_j] = \begin{cases} t & \text{si } i=j \\ x_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\text{ii. } c_k [t/x_j] = c_k$$

$$\text{iii. } f_i(t_1, \dots, t_{a_i}) [t/x_j] = f_i(t_1[t/x_j], \dots, t_{a_i}[t/x_j])$$

Sustitución de Variables Libres por Términos en Fórmulas (1)

- Sea A un alfabeto $P_1 \dots P_n, f_1 \dots f_m, c_i (i \in I)$ de tipo $\langle r_1 \dots r_n; a_1 \dots a_m; k \rangle$

Def 2.3.10 [sustitución de términos en fórmulas]

- Sea $t \in \text{TERM}_A$, $x_j \in \text{VAR}$ y $\alpha \in \text{FORM}_A$.

Definimos $\alpha[t/x]$ del siguiente modo:

i. $\perp [t/x_j] = \perp$

ii. $P_j(t_1, \dots, t_{r_j}) [t/x_j] = P_j(t_1[t/x_j], \dots, t_{r_j}[t/x_j])$

iii. $(t_1 = t_2) [t/x_j] = t_1[t/x_j] = t_2[t/x_j]$

iv. $(\alpha \square \beta) [t/x_j] = (\alpha [t/x_j] \square \beta [t/x_j]) \quad (\square \in \{\rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\})$

v. $(\neg \alpha) [t/x_j] = \neg(\alpha [t/x_j])$

vi. $((\forall x_i) \alpha) [t/x_j] = \begin{cases} (\forall x_i)(\alpha [t/x_j]) & \text{si } i \neq j \\ ((\forall x_i) \alpha) & \text{si } i = j \end{cases}$

$((\exists x_i) \alpha) [t/x_j] \quad \text{--- análogo a } ((\forall x_i) \alpha) [t/x_j] \text{ ---}$

Ejemplos de Sustitución

Sea L un lenguaje de tipo $\langle 1,2;2,2;2 \rangle$

$$- P_1(f_2(x_1, x_2))[x_1/x_2] = P_1(f_2(x_1, x_1))$$

$$- (P_1(x_1) \rightarrow P_2(c_1, x_3))[c_2/x_1] = (P_1(c_2) \rightarrow P_2(c_1, x_3))$$

$$- ((\exists x_1) P_2(x_1, x_3))[c_3/x_3] = ((\exists x_1) P_2(x_1, c_3))$$

$$- ((\exists x_1) P_2(x_1, x_3))[c_1/x_1] = ((\exists x_1) P_2(x_1, x_3))$$

$$- ((\exists x_1) P_2(x_1, x_3))[x_1/x_3] = ((\exists x_1) P_2(x_1, x_1)) \leftarrow \text{¡cambia}$$

totalmente el sentido!



¡No queremos estas situaciones!

Ejemplo truco

```
y := 45;  
print (sumar2(y));
```

Si acá pongo y

```
FUNCTION sumar2(x:int):int;
```

```
BEGIN
```

```
VAR y:int;
```

```
y := 2; sumar2 := x+y
```

```
END
```

...y acá pongo y

Identificaré
las dos
variables, y
devolveré 4

Ejemplo trucho (cont.)

- El ejemplo anterior no es real. Los lenguajes tipo Pascal implementan pasajes de parámetro por copia o por referencia, y no realizan una sustitución textual del código, como nosotros.
- Sin embargo, igualmente ilustra la dificultad de no considerar el contexto en que se realiza una sustitución.

¿Que falló en el último caso?

-
- $((\exists x_1) P_2(x_1, x_3))[x_1/x_3] = ((\exists x_1) P_2(x_1, x_1))$
 - \rightarrow la variable x_3 estaba **libre** en $((\exists x_1) P_2(x_1, x_3))$
 - \rightarrow al sustituir x_3 por x_1 (que es la variable que cuantifica el \exists), queda **ligada**: $((\exists x_1) P_2(x_1, x_1))$
 - y lo mismo hubiera pasado si en vez de $[x_1/x_3]$ se pone $[t/x_3]$ con $x_1 \in FV(t)$.
 - El problema ocurre cuando hacemos $((\exists x_i)\alpha)[t/x]$ y x_i está en t : **$x_i \in FV(t)$**
 - \rightarrow *luego, pedimos que $x_i \notin FV(t)$*
 - Hay algunos casos en que no hace falta pedir esa condición. Entre ellos está cuando la sustitución “no se realiza” porque **$x \notin FV((\exists x_i) \alpha)$**
-

Término Libre para una Variable

Def 2.3.11 [término libre para una variable en una fórmula]

Sean $t \in \text{TERM}$, $\varphi \in \text{FORM}$. t está libre para x en φ si:

- i. φ es atómica
 - ii. $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$ y t está libre para x en φ_1 y en φ_2
 - iii. $\varphi = (\neg \varphi_1)$ y t está libre para x en φ_1
 - iv. $\varphi = (\forall y) \varphi_1$ (o $\varphi = (\exists y) \varphi_1$) y se cumple alguna de las siguientes:
 - i. $x \notin \text{FV}((\forall y) \varphi_1)$ (resp. $x \notin \text{FV}((\exists y) \varphi_1)$)
 - ii. $y \notin \text{FV}(t)$ y t está libre para x en φ_1
- ***De ahora en adelante sólo aplicaremos la sustitución $\varphi[t/x]$ cuando t esté libre para x en φ . Si esto no sucede: ¡no se puede aplicar la sustitución!***

Ejemplos

- x_2 está libre para x_1 en $(\exists x_1)P_1(x_1, x_3)$
 - pues $x_1 \notin FV((\exists x_1)P_1(x_1, x_3))$
- cualquier t está libre para x_2 en $(\exists x_1)(\forall x_2)P_1(x_1, x_2)$
 - pues $x_2 \notin FV((\exists x_1)(\forall x_2)P_1(x_1, x_2))$
- $f(x_3, x_1)$ no está libre para x_2 en $(\forall x_3)P_2(x_2)$
 - pues $x_2 \in FV((\forall x_3)P_2(x_2))$
 - y $x_3 \in V(f(x_3, x_1))$ (aunque $f(x_3, x_1)$ está libre para x_2 en $P_2(x_2)$)

Ejemplos

- $f(x_3, x_1)$ no está libre para x_2 en $(\forall x_4)(\exists x_3)(x_3 = x_2)$
 - pues $x_2 \in FV((\forall x_4)(\exists x_3)(x_3 = x_2))$
 - y $f(x_3, x_1)$ no está libre para x_2 en $(\exists x_3)(x_3 = x_2)$
 - pues $x_2 \in FV((\exists x_3)(x_3 = x_2))$
 - y $x_3 \in V(f(x_3, x_1))$ (aunque $x_4 \notin V(f(x_3, x_1))$)

Sustitución Simultánea

Def [sustitución simultánea]

- $t [t_1, \dots, t_n / x_1, \dots, x_n]$ es el resultado de sustituir las ocurrencias de cada x_i por t_i en t *simultáneamente* ($i=1, \dots, n$, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$).
- $\alpha [t_1, \dots, t_n / x_1, \dots, x_n]$ se define análogamente
- ¡CUIDADO! No es lo mismo sustitución simultánea que composición de sustituciones:
 - $x_1 [x_2, c_2 / x_1, x_2] = x_2$
 - $x_1 [x_2 / x_1] [c_2 / x_2] = x_2 [c_2 / x_2] = c_2$

Notación: $[\alpha(x), \alpha(t)]$

- Para simplificar la notación $\alpha[t/x]$, en matemática se utilizan (meta)expresiones de la forma $\alpha(x)$ o $\alpha(x,y,z)$.
- Esta notación no implica que las variables listadas ocurren libres en la fórmula ni que la fórmula no tiene otras variables libres que no sean las listadas...
- Sólo se utiliza para escribir informalmente la sustitución:
 - Por ejemplo, $\alpha(t)$ notará el resultado de sustituir t por x en $\alpha(x)$, $\alpha(s,t,u)$ notará el resultado de sustituir s por x , t por y y u por z en $\alpha(x,y,z)$.

Símbolo de Predicado $\$$

- Las sustituciones definidas hasta el momento, permiten poner un *término* dado en el lugar de una variable.
- Eso es diferente de la sustitución de Prop que permitía poner una *fórmula* en el lugar de una *fórmula atómica*.
- Para hacer esto, se tiene que hacer una modificación en el lenguaje.

Agregamos a la definición de FORM una cláusula más:

- $\$ \in \text{FORM}$ ($\$$ es una variable de fórmula, la usamos como comodín para sustituir una fórmula en otra).

\$ y Fórmulas Libres para \$

Def 2.3.13 [fórmula libre para \$]

Sean $\alpha, \varphi \in \text{FORM}$. Entonces φ está libre para \$ en α si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

i. α es atómica

ii. $\alpha = (\alpha_1 \square \alpha_2)$ y φ está libre para \$ en α_1 y en α_2

iii. $\alpha = (\neg \alpha_1)$ y φ está libre para \$ en α_1

iv. $\alpha = (\forall x_i)\alpha_1$ o $\alpha = (\exists x_i)\alpha_1$ y ($\$$ no ocurre en α_1 o $x_i \notin \text{FV}(\varphi)$ y φ está libre para \$ en α_1)

Sustitución de Fórmulas en Fórmulas

Def 2.3.14 [sustitución de fórmulas en fórmulas]

Sean $\alpha, \varphi \in \text{FORM}$ tal que φ está libre para $\$$ en α .

Definimos $\alpha[\varphi/\$]$ del siguiente modo:

$$\text{i. si } \alpha \text{ es atómica, entonces } \alpha[\varphi/\$] = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \neq \$ \\ \varphi & \text{si } \alpha = \$ \end{cases}$$

$$\text{ii. } (\alpha \square \beta) [\varphi/\$] = (\alpha[\varphi/\$] \square \beta[\varphi/\$])$$

$$\text{iii. } (\neg \alpha) [\varphi/\$] = \neg(\alpha[\varphi/\$])$$

$$\text{iv. } ((\forall x_i) \alpha) [\varphi/\$] = (\forall x_i)(\alpha[\varphi/\$])$$

$$\text{v. } ((\exists x_i) \alpha) [\varphi/\$] = (\exists x_i)(\alpha[\varphi/\$])$$

Resumen de Sintaxis de la Lógica de Predicados de Primer Orden

- Se definieron dos familias de lenguajes:
 - uno para representar elementos del universo
 - otro para representar afirmaciones sobre esos elementos
- Se definieron los principios de inducción y recursión primitivas para esos lenguajes con el objetivo de:
 - hacer demostraciones
 - definir funciones recursivamente sobre esos lenguajes

Resumen de Sintaxis de la Lógica de Predicados de Primer Orden.

- Se estudiaron los aspectos sintácticos que introducen las variables y se definieron algunos conceptos relativos a eso:
 - ocurrencia libre y ligada de una variable
 - término libre para una variable en una fórmula dada
- Se definieron funciones de sustitución:
 - de una variable por un término en fórmulas y términos
 - de fórmulas en fórmulas