Lógica Proposicional

Metateoría: Corrección y Completitud

¿Del conjunto de hipótesis Γ se deduce α?

$¿\ \Gamma \models \alpha\ ?$

-Tablas de verdad.

- Equivalencia lógicas.

Existen métodos que siempre responden

SÍ o NO

$¿\ \Gamma \vdash \alpha\ ?$

- Prueba formal.
- Requiere ingenio.

¿Estas dos formas de responder la pregunta son equivalentes?

Corrección y completitud del cálculo proposicional

- Si construimos una prueba siguiendo las reglas dadas:
  - ¿estamos seguros de que no puede ocurrir que las hipótesis sean ciertas y la conclusión no?
  - ¿Y recíprocamente? Si α es consecuencia lógica de Γ: ¿existe una derivación de α con hipótesis en Γ?
- O sea: ¿se cumple $\Gamma \vdash \alpha \;\Leftrightarrow\; \Gamma \models \alpha$?

Corrección del cálculo proposicional

- La corrección de un cálculo nos indica que las reglas de construcción de sus juicios reflejan nociones semánticas. Un cálculo es correcto para una semántica.
- Lema 1.6.1 [corrección del sistema de pruebas]
  - Para toda $\Gamma \subseteq$ Prop y $\alpha \in$ PROP, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$.

Corrección del cálculo proposicional

- Lema 1.6.1 [corrección del sistema de pruebas]
  - Para toda $\Gamma \subseteq$ Prop y $\alpha \in$ PROP, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$.
- O lo que es lo mismo, con $\Gamma \subseteq$ Prop y $\alpha \in$ PROP cualesquiera,
  - $\forall D \in$ Der::(H(D) $\models$ C(D)).
- Por lo que se puede demostrar por inducción en Der.

Algunos casos

(PB) **HIP)** Si $\varphi \in$ PROP entonces $\varphi \in$ DER
T) $\varphi \models \varphi$

$PI_{I\wedge}$)

$\wedge_I$) **Si** $\overset{D}{\varphi} \in$ DER **y** $\overset{D'}{\psi} \in$ DER **entonces** $\dfrac{\overset{D}{\varphi} \qquad \overset{D'}{\psi}}{\varphi \wedge \psi} \in$ DER

Hay que probar que $\Gamma \cup \Delta \models \varphi \wedge \psi$, y podemos usar como hipótesis $\Gamma \models \varphi$ y $\Delta \models \psi$.

Algunos casos

PI$_{I\rightarrow}$)

$\rightarrow_I$) **Si** $\begin{array}{c}\varphi \\ D \\ \psi\end{array}$ $\in$ DER **entonces** $\dfrac{\begin{array}{c}\cancel{\varphi} \\ D \\ \psi\end{array}}{\varphi \rightarrow \psi}$ $\in$ DER

Hay que probar que $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$,
y podemos usar como hipótesis $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$.

Corrección

- Proporciona formas de mostrar que algo es consecuencia semántica, o que algo no es consecuencia sintáctica.
- Otra forma de mostrar que algo es tautología
  - si $\vdash \alpha$ entonces $\models \alpha$.
- Una forma de mostrar que algo ***no*** es teorema
  - si α no es tautología, entonces no es teorema.

Completitud

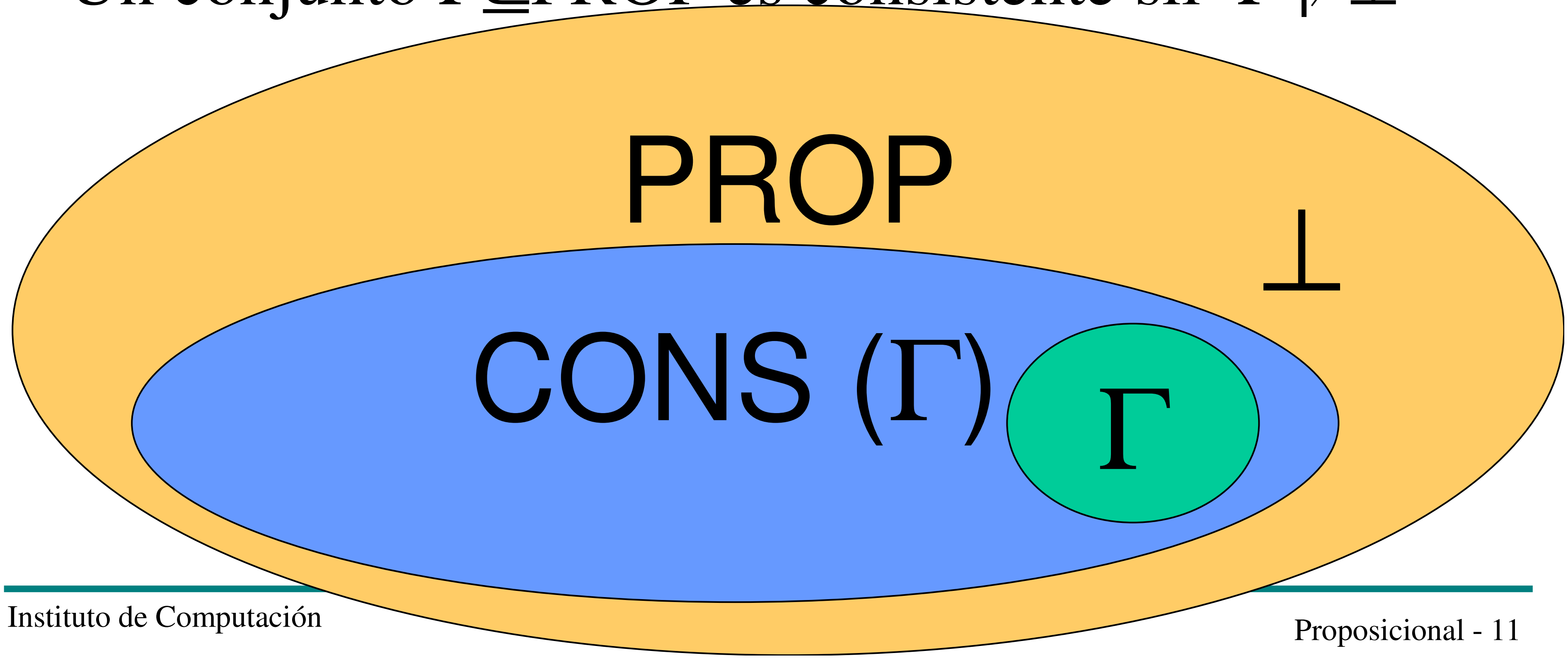
- $\Gamma \models \alpha \;\Rightarrow\; \Gamma \vdash \alpha$
- Observar que demostrar la afirmación anterior, implica transformar una noción semántica en sintáctica.
- Antes de llegar a ver la demostración de completitud, conviene estudiar las nociones de Consistencia.

Consistencia

Conjuntos Consistentes

Def. 1.6.2 [conjunto consistente o libre de contradicciones]

Un conjunto $\Gamma \subseteq PROP$ es consistente sii $\Gamma \nvdash \bot$



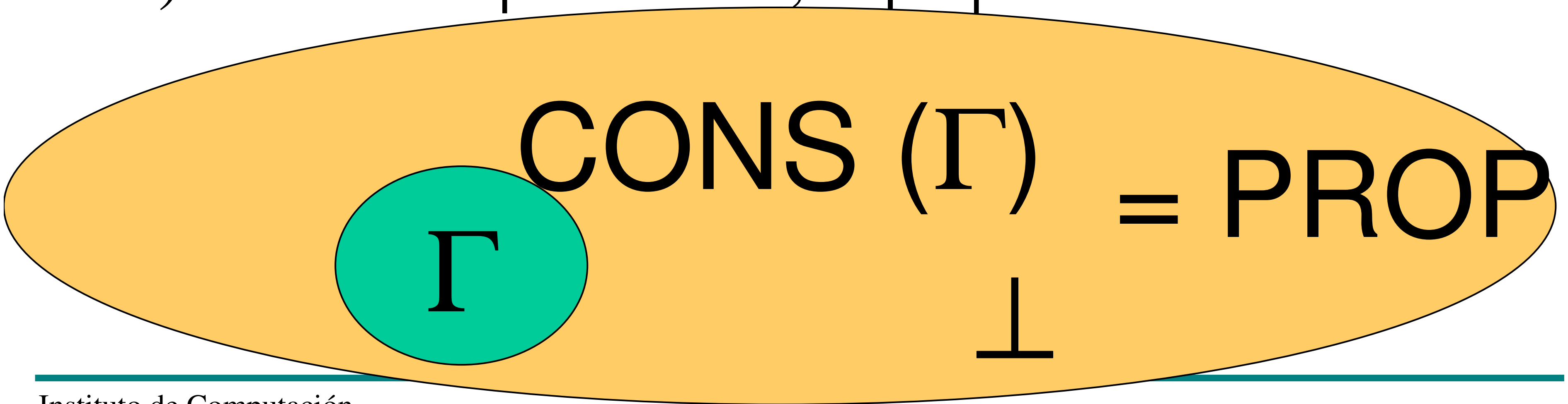
Conjuntos Consistentes

- <u>Lema 1.6.3</u>. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) Γ es inconsistente

ii) Existe $\varphi \in$ PROP, $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \vdash \neg \varphi$

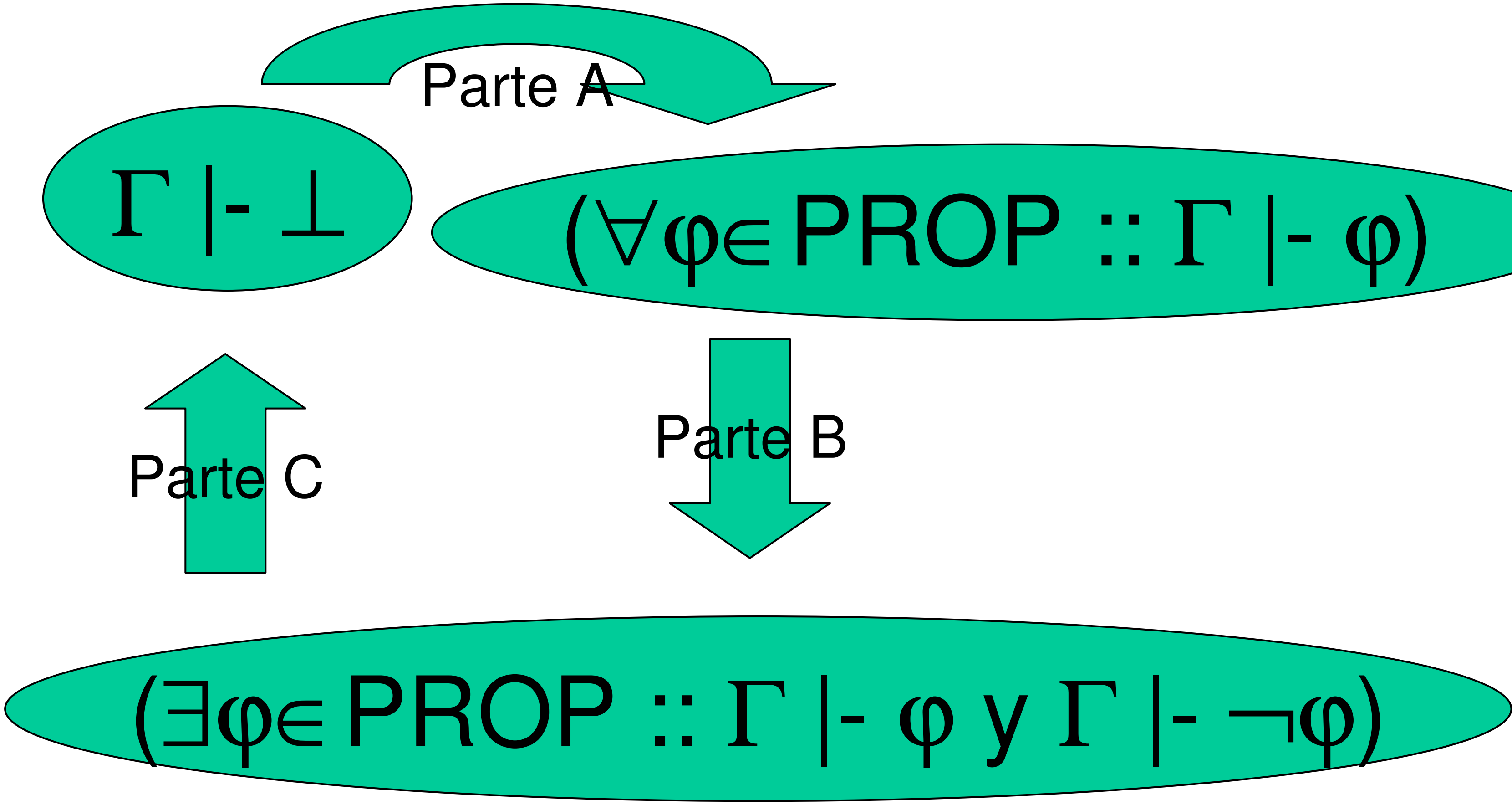
iii) Para toda $\varphi \in$ PROP, $\Gamma \vdash \varphi$



Lemma 1.6.3

- Probar que α, β, y γ son equivalentes
  - Se quiere probar $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma) \wedge (\gamma \leftrightarrow \alpha)$
  - Que es lo mismo que $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \wedge (\gamma \rightarrow \alpha)$
  - Que es lo mismo que $(\alpha \leftrightarrow \beta) \wedge (\beta \leftrightarrow \gamma)$
  - Que es lo mismo que $(\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \wedge (\neg\beta \leftrightarrow \neg\gamma)$
  - Que es lo mismo que$(\neg\alpha\rightarrow\neg\gamma) \wedge (\neg\gamma\rightarrow\neg\beta) \wedge (\neg\beta\rightarrow\neg\alpha)$
  - Que ***no*** es lo mismo que $(\alpha \leftrightarrow \beta \leftrightarrow \gamma)$
  - Que ***no*** es lo mismo que $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)$
  - Que ***no*** es lo mismo que $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$
  - ¿Por qué?

Lemma 1.6.3



Lema 1.6.3 Parte A

H) Γ |- $\bot$	T) Γ |- φ

Γ |- $\bot$

$\Leftrightarrow$ (Notación |-)

($\exists$ D $\in$ DER :: H(D) $\subseteq \Gamma$ y C(D) = $\bot$)

$\Rightarrow$ (Eliminación de $\bot$)

($\forall\varphi$ :: ($\exists$ D :: H(D) $\subseteq \Gamma$ y C(D) = φ))

$\Leftrightarrow$ (Notación |-)

($\forall\varphi$ :: Γ |- φ)

Condición suficiente de consistencia

<u>Lema. 1.6.4</u> Sea $\Gamma \subseteq$PROP. Si existe una valuación v tal que $v(\varphi) = 1$ para toda $\varphi \in \Gamma$, entonces Γ es consistente

Se prueba el contrarrecíproco

Γ es inconsistente

$\Rightarrow \Gamma \vdash \bot$ Ejercicio: justifique todos los pasos

$\Rightarrow \Gamma \models \bot$

$\Rightarrow (\forall v :: \text{si } (\forall \gamma \in \Gamma :: v(\gamma) = 1) \text{ entonces } v(\bot) = 1)$

$\Rightarrow (\forall v :: (\exists \gamma \in \Gamma :: v(\gamma) = 0))$

Ejercicio

- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos es consistente?

1. $\{\neg p_1 \wedge p_2 \to p_0, p_1 \to (\neg p_1 \to p_2), p_0 \leftrightarrow \neg p_2\}$
2. $\{p_i \to p_{i+1} : i \in N\}$
3. $\{p_i \to p_{i+1} : i \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{p_2 \to \neg p_0\}$
4. $\{p_i \to p_{i+1} : i \in \{0, 1, 2\}\} \cup \{p_3 \to \neg p_0\}$

Conjuntos Consistentes

Lema. 1.6.5

i) Si $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \varphi$

ii) Si $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es inconsistente entonces $\Gamma \vdash \neg\varphi$

Otra lectura

i) Si $\Gamma \nvdash \varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$ es consistente

ii) Si $\Gamma \nvdash \neg\varphi$, entonces $\Gamma \cup \{\varphi\}$ es consistente

Consistencia Maximal

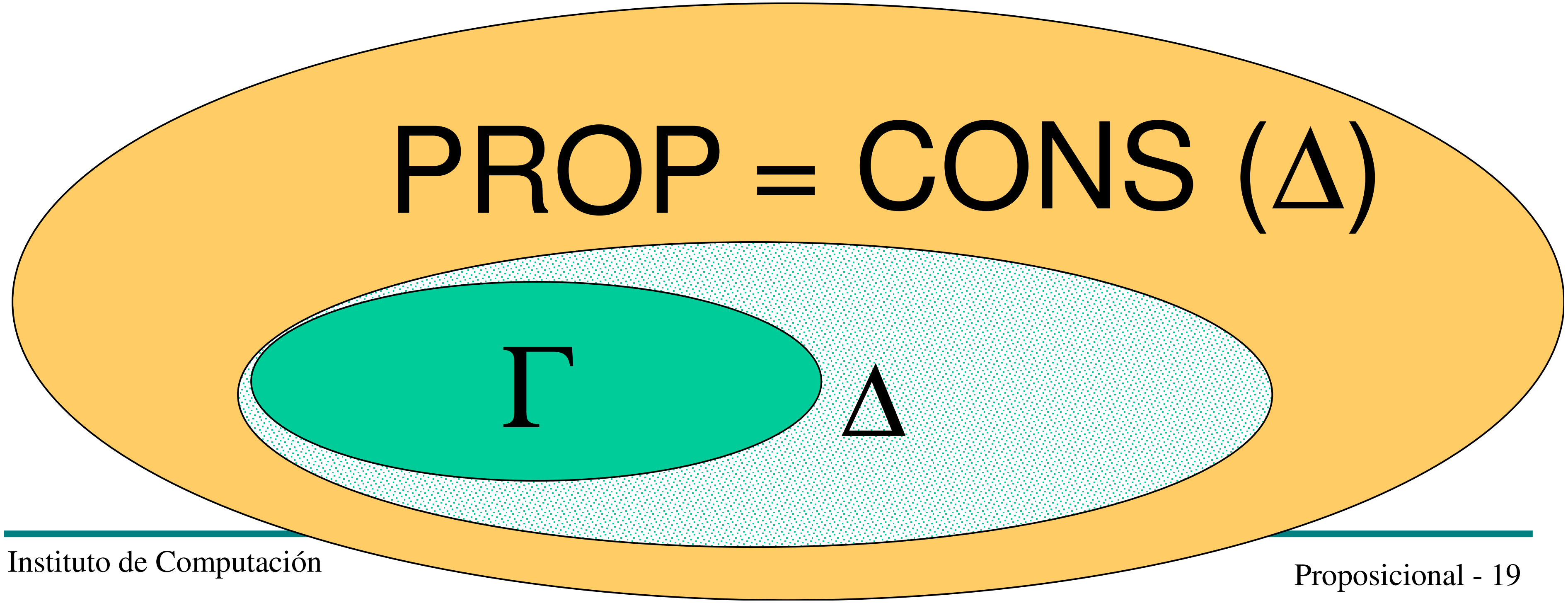
<u>Def 1.6.6</u> [consistencia maximal]

$\Gamma \subseteq$ PROP es consistente maximal ssi:

i) Γ es consistente, y

ii) Para todo Δ consistente tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ se cumple $\Gamma = \Delta$

o ii) Para todo Δ, si $\Gamma \subset \Delta$ entonces Δ es inconsistente



Consistencia maximal

- Cada valuación determina un conjunto consistente maximal
  - $\Gamma = \{\varphi \in PROP \mid v(\varphi)=1\}$
  - Considere Δ, tal que $\Gamma \subset \Delta$
  - Tome $\psi \in \Delta \backslash \Gamma$
  - Muestre que $\neg \psi \in \Gamma$
  - Concluya que Δ es inconsistente

Consistencia Maximal y Teorías

<u>Def</u> [teoría]

- Un conjunto $\Gamma \subseteq$ PROP es una teoría sii CONS(Γ) $\subseteq \Gamma$
- o sea,
  - para todo $\alpha \in$ PROP, si $\Gamma \vdash \alpha$ entonces $\alpha \in \Gamma$)

<u>Lema 1.6.8</u>

- Si Γ es consistente maximal entonces Γ es teoría
  - $\Gamma \vdash \alpha$
  - $\Rightarrow \Gamma \nvdash \neg\alpha$ (consistencia, Lema 1.6.3 – contrarrec.)
  - $\Rightarrow \Gamma \cup \{\alpha\}$ es consistente (Lema 1.6.5)
  - $\Rightarrow \alpha \in \Gamma$ (maximalidad)

Consistencia Maximal (cont.)

<u>Lema 1.6.9</u>

- Si Γ es consistente maximal entonces:

i) para toda $\alpha \in$ PROP o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg \alpha \in \Gamma$

ii) para todas α , $\beta \in$ PROP

$\alpha \to \beta \in \Gamma$ ssi (si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$)

<u>Corolario</u> [pertenencia a un conjunto maximal]

- Si Γ es consistente maximal entonces:

i) $\alpha \in \Gamma$ ssi $\neg\alpha \notin \Gamma$

ii) $\neg\alpha \in \Gamma$ ssi $\alpha \notin \Gamma$

<u>Lema. 1.6.7</u> [consistencia y consistencia maximal]

- Si Γ es consistente entonces existe Γ^* consistente maximal tal que $\Gamma \subseteq \Gamma^*$

Lema 1.6.9.i

Si Γ es consistente maximal entonces:

i) para toda $\alpha \in$ PROP o bien $\alpha \in \Gamma$ o bien $\neg \alpha \in \Gamma$

Dem.

$\alpha \notin \Gamma$	$\neg\alpha \notin \Gamma$
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$\Gamma \cup \{\alpha\} \mid\!- \bot$	$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \mid\!- \bot$
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$\Gamma \mid\!- \neg\alpha$	$\Gamma \mid\!- \alpha$
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$\neg\alpha \in \Gamma$	$\alpha \in \Gamma$

Lema 1.6.9.ii (directo)

Si Γ es consistente maximal entonces:

ii) para todas $\alpha, \beta \in$ PROP

Si $\alpha \to \beta \in \Gamma$ entonces

(si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$)

Dem.$\Rightarrow$

Suponga $\alpha \in \Gamma$.

Se puede construir la siguiente derivación:

$$\dfrac{\alpha \to \beta \qquad \alpha}{\beta}\,(E\!\to)$$

Lema 1.6.9.ii (Recíproco)

Si Γ es consistente maximal entonces:

ii) para todas $\alpha, \beta \in$ PROP

Si (si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$)

entonces $\alpha \to \beta \in \Gamma$

Dem.$\Leftarrow$

Dado que (si $\alpha \in \Gamma$ entonces $\beta \in \Gamma$) ocurre uno de los dos casos:

Caso 1: $\alpha \in \Gamma$ $\Rightarrow$(por "entonces") $\beta \in \Gamma$ $\Rightarrow$ $\alpha \to \beta \in \Gamma$	Caso 2: $\alpha \notin \Gamma$ $\Rightarrow$(por parte i)) $\neg\alpha \in \Gamma$ $\Rightarrow$ Se puede hacer la siguiente deriv.	$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha}^{1} \quad \neg\alpha}{\bot}(E\neg)}{\beta}(E\bot)}{\alpha \to \beta}(I{\to}1)$

Lema 1.6.7.

- Todo conjunto consistente S se encuentra incluido en algún conjunto consistente maximal.

1. Enumere las proposiciones: φ_0, φ_1, φ_2 ...
2. Defina recursivamente la siguiente familia de conjuntos de fórmulas proposicionales

$S_0 := S$

$S_{n+1} :=$ si $S_n \cup \{\varphi_n\}$ consistente,
entonces $S_n \cup \{\varphi_n\}$,
sino S_n

Lema 1.6.7.

3. Defina el conjunto de fórmulas proposicionales $S^* := \cup \{S_n\}$
4. Pruebe que S_n es consistente (inducción)
5. Pruebe que S^* es consistente (contrarrecíproco)
6. Pruebe que S^* es consistente maximal (contrarrecíproco)

Resumen de Consistencia

- Definiciones
  - Conjunto de fórmulas Consistente
  - Conjunto de fórmulas Consistente Maximal
  - Teoría
- Principales Consecuencias de las Definiciones
  - Si $\exists$ v valuación / $v(\Gamma)=1 \Rightarrow \Gamma$ Consistente
  - Γ Consistente $\Rightarrow \exists\ \Delta$ CM / $\Gamma \subseteq \Delta$
- Notar que:
  - si dos fórmulas α, $\beta \in \Gamma$ CM, entonces las fórmulas que se construyen con α y β y debieran ser verdaderas si α y β lo son ($\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \gamma$, …), también están en Γ.

Completitud del Cálculo de Deducción Natural en Proposicional

Completitud

<u>Lema 1.6.10</u>

Si $\Gamma \subseteq$ PROP es consistente entonces existe una valuación v tal que $v(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in \Gamma$.

1. Γ incluído en Γ^* consistente maximal
2. Defino v con $v(p_i) = 1$ sii $p_i \in \Gamma^*$
3. Pruebo $v(\alpha) = 1$ sii $\alpha \in \Gamma^*$ (inducción)

Completitud

Corolario 1.6.11

Para todas $\alpha \in$ PROP, $\Gamma \subseteq$ PROP, $\Gamma \not\models \alpha$ si y sólo si existe una valuación v tal que:

- $v(\alpha) = 0$
- para toda $\beta \in \Gamma$ se cumple $v(\beta) = 1$

$$\Gamma \not\models \alpha$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Gamma \cup \{\neg\alpha\} \not\models \bot$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\exists v :: (\forall\ \varphi \in\ \Gamma \cup \{\neg\alpha\} :: v(\varphi) = 1))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\exists v :: (\forall\ \varphi \in\ \Gamma :: v(\varphi) = 1) \text{ y } v(\alpha) = 0)$$

Completitud

Teorema 1.6.12 [completitud del cálculo proposicional]

Para todas $\alpha \in$ PROP, $\Gamma \subseteq$ PROP,

si $\Gamma \models \alpha$ entonces $\Gamma \vdash \alpha$

Es el contrarecíproco del anterior.

Corrección y Completitud

Para todos $\Gamma \subseteq$ PROP, $\alpha \in$ PROP $\Gamma \mid\!- \alpha$ sii $\Gamma \models \alpha$

$\Gamma \models \alpha$

-Tablas de verdad.

- Equivalencia lógicas.

Existe un método que siempre responde SI o NO

$\Leftrightarrow$

$\Gamma \mid\!- \alpha$

- Prueba formal.
- Requiere ingenio.

Los teoremas nos autorizan a *combinar* ambas técnicas y utilizar equivalencias semánticas y pruebas (que es lo que usualmente hacemos en matemática).

Prueba del teorema de completitd

- Demostrar : Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$
  - Implica probar que existe una derivación de φ a partir de Γ teniendo como única información los valores de verdad de φ y Γ
- ¿Cómo construir la derivación?
  - La demostración de 1.6.12 no nos da el método
- Se puede dar una prueba constructiva del teorema de completitud [Post-Bernay-Kalmar]
  - Esta prueba nos da una derivación de φ a partir de Γ sabiendo que $\Gamma \models \varphi$

Prueba constructiva de completitud

- Si $\Gamma=\{\alpha_1 \ldots \alpha_n\}$ es finito, demostrar $\alpha_1 \ldots \alpha_n \vdash \beta$ es equivalente a demostrar $\vdash \alpha_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$

- Se prueban los siguientes resultados:
  - para toda $\alpha \in PROP$ se deriva $\vdash \alpha^c \leftrightarrow \alpha$
  - (α^c es la forma normal conjuntiva de α)
  - una forma normal conjuntiva φ^c es tautología si y sólo si cada "factor" de la conjunción contiene a $\neg\bot$ o a un par $p_i \vee \neg p_i$ para alguna letra p_i.

Prueba constructiva de completitud (cont.)

Para construir una derivación de la tautología $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \alpha_n \rightarrow \beta$:

1. Encontrar α^c.
2. Como α^c es tautología, construir una derivación para cada $(pi \vee \neg\, pi)$ y una derivación para cada $\neg\bot$ que ocurran en α^c.
3. Componer estas derivaciones para obtener una prueba de α^c.
4. Utilizar la derivación de $\vdash \alpha^c \leftrightarrow \alpha$ para construir la derivación de $\vdash \alpha$.

Ejemplo

p, $p \to q \models q$

- Para escribir una derivación de $\vdash p \to (p \to q) \to q$
  - La forma normal conjuntiva de la formula es: $(p \lor \neg p) \land (p \lor \neg p \lor q)$
  - La derivación buscada es:

$$\dfrac{\dfrac{p\lor\neg p \qquad \dfrac{p\lor\neg p}{p\lor\neg p\lor q}}{(p\lor\neg p)\land(p\lor\neg p\lor q)} \qquad ((p\lor\neg p)\land(p\lor\neg p\lor q)) \leftrightarrow (p\to(p\to q)\to q)}{p\to(p\to q)\to q}$$

Fin