Práctico 4
Deducción Natural - Lógica Proposicional

Ejercicio 1

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Construya derivaciones que demuestren que las siguientes proposiciones son teoremas del cálculo proposicional.

a. $\varphi \to \varphi$
b. $\bot \to \varphi$
c. $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
d. $\varphi \to (\psi \to \varphi \wedge \psi)$
e. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi)$
f. $(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \to \neg\psi)$
g. $(\varphi \to (\psi \to \sigma)) \leftrightarrow (\psi \to (\varphi \to \sigma))$
h. $(\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi$
i. $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \sigma)) \to (\varphi \to \sigma))$
j. $((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \sigma)) \to (\varphi \to (\psi \to \sigma))$
k. $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$

Ejercicio 2

a. Dada la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi \to \neg\varphi \quad [\varphi]^1}{\neg\varphi}\,E\to \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\neg\varphi}\,I\neg(1)}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,I\to$$

Dé Γ y ρ tales que la derivación anterior justifique que $\Gamma \vdash \rho$. Dé tres conjuntos Γ distintos.

b. Idem la parte a) para la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to \neg\varphi]^2 \quad [\varphi]^1}{\neg\varphi}\,E\to \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\neg\varphi}\,I\neg(1)}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,I\to(2)$$

c. Idem la parte a) para la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\varphi \to \neg\varphi]^2 \quad \varphi}{\neg\varphi}\,E\to \qquad [\varphi]^1}{\bot}\,E\neg}{\neg\varphi}\,I\neg(1)}{(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi}\,I\to(2)$$

Ejercicio 3

Sean φ, ψ, σ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Demuestre que:

a. $\varphi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

b. $\psi \vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

c. $\neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \vdash \psi$

d. $\neg\varphi \vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\varphi$

e. $\neg\varphi \vdash \varphi \to \psi$

f. $\vdash \varphi \vee \psi \to \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

g. Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \vee \varphi$

h. Si $\vdash \varphi$ entonces $\vdash \psi \to \varphi$

Ejercicio 4

Complete la siguiente derivación de forma tal que a partir de ella sea posible afirmar que:
$\vdash ((\varphi \to \psi) \wedge \neg(\psi \wedge \gamma)) \to (\varphi \to \neg\gamma)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\psi \wedge \gamma) \qquad \dfrac{\dfrac{\varphi \to \psi \quad \varphi}{\psi} \qquad \gamma}{\psi \wedge \gamma}}{\bot}}{\neg\gamma}}{\varphi \to \neg\gamma}$$

Ejercicio 5

Se pretende demostrar que $\neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3) \vdash (p_2 \vee p_3) \to p_1$ para lo cual se construye la siguiente derivación:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3) \quad [\neg p_1]^1}{\neg p_2 \wedge \neg p_3}\,E\to}{\neg p_2}\,I\wedge \qquad \dfrac{[p_2 \vee p_3]^2}{p_2}\,E\vee}{\bot}\,I\bot}{p_1}\,RAA(1)}{(p_2 \vee p_3) \to p_1}\,I\to(2)$$

Determine si la derivación es correcta. En caso de no serlo indique los errores y construya una derivación que permita demostrar la afirmación.

En caso de ser correcta demuestre que la derivación pertenece a DER.

Ejercicio 6

El tamaño $s(D)$ de una derivación D es la cantidad de reglas aplicadas en D.

Dé una definición recursiva de $s(D)$.

Ejercicio 7

Sean φ, ψ proposiciones cualesquiera de $PROP$. Demuestre que:

a. $\vdash \varphi \vee \psi \to \psi \vee \varphi$

b. $\vdash \varphi \vee \varphi \to \varphi$

c. $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$

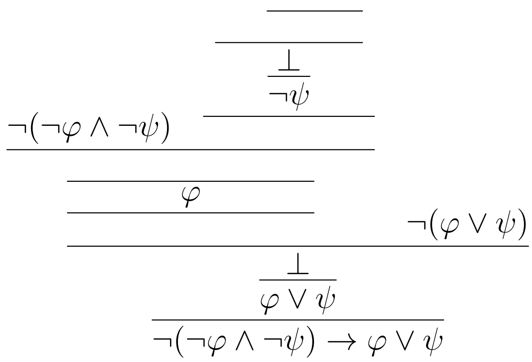
d. $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \to \psi)$

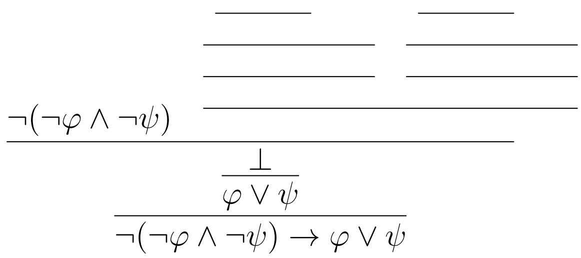
e. $\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$

f. $\vdash (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

Ejercicio 8

a. Dada la siguiente afirmación: $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \varphi \vee \psi$ complete las siguientes derivaciones de forma tal que justifiquen la afirmación dada:





b. Demuestre que: Si $\varphi \vdash \sigma$ y $\psi \vdash \sigma$ entonces $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash \sigma$.

Ejercicio 9

a. Dé una definición inductiva de la relación $\vdash$, o sea, defina inductivamente una relación $R \subseteq Pot(PROP) \times PROP$ tal que $R(\Gamma, \varphi)$ se cumple cuando $\Gamma \vdash \varphi$.

b. Muestre que la definición de R no es libre.

c. Demuestre que $(\Gamma, \varphi) \in R$ ssi $\Gamma \vdash \varphi$

d. Pruebe (usando c) que para todo $\Gamma \subseteq PROP$ y para toda $\varphi \in PROP$ tales que: $R(\Gamma, \varphi)$ existe un conjunto finito Γ', $\Gamma' \subseteq \Gamma$, tal que también se cumple $R(\Gamma', \varphi)$.

Ejercicio 10

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a. $\vdash \neg\bot$

b. $\vdash \varphi$ ssi $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\bot$

c. $\vdash \neg\varphi$ ssi $\vdash \varphi \leftrightarrow \bot$

d. $\vdash \bot \vee \neg\bot$

e. $\vdash (\varphi \leftrightarrow \neg\bot) \vee (\varphi \leftrightarrow \bot)$

f. $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \leftrightarrow \neg\bot)$