Lógica Proposicional

Semántica

Significado de una Fórmula Proposicional

- El significado de una proposición está dado por su ***valor de verdad*** (o sea, si es Verdadera o Falsa) que se obtiene de la siguiente forma:
  - las variables proposicionales pueden tomar cualquier valor de verdad
  - $\perp$ es falsa
  - los valores de verdad de las fórmulas atómicas se extienden a las fórmulas no atómicas de acuerdo al significado de los conectivos que contienen.

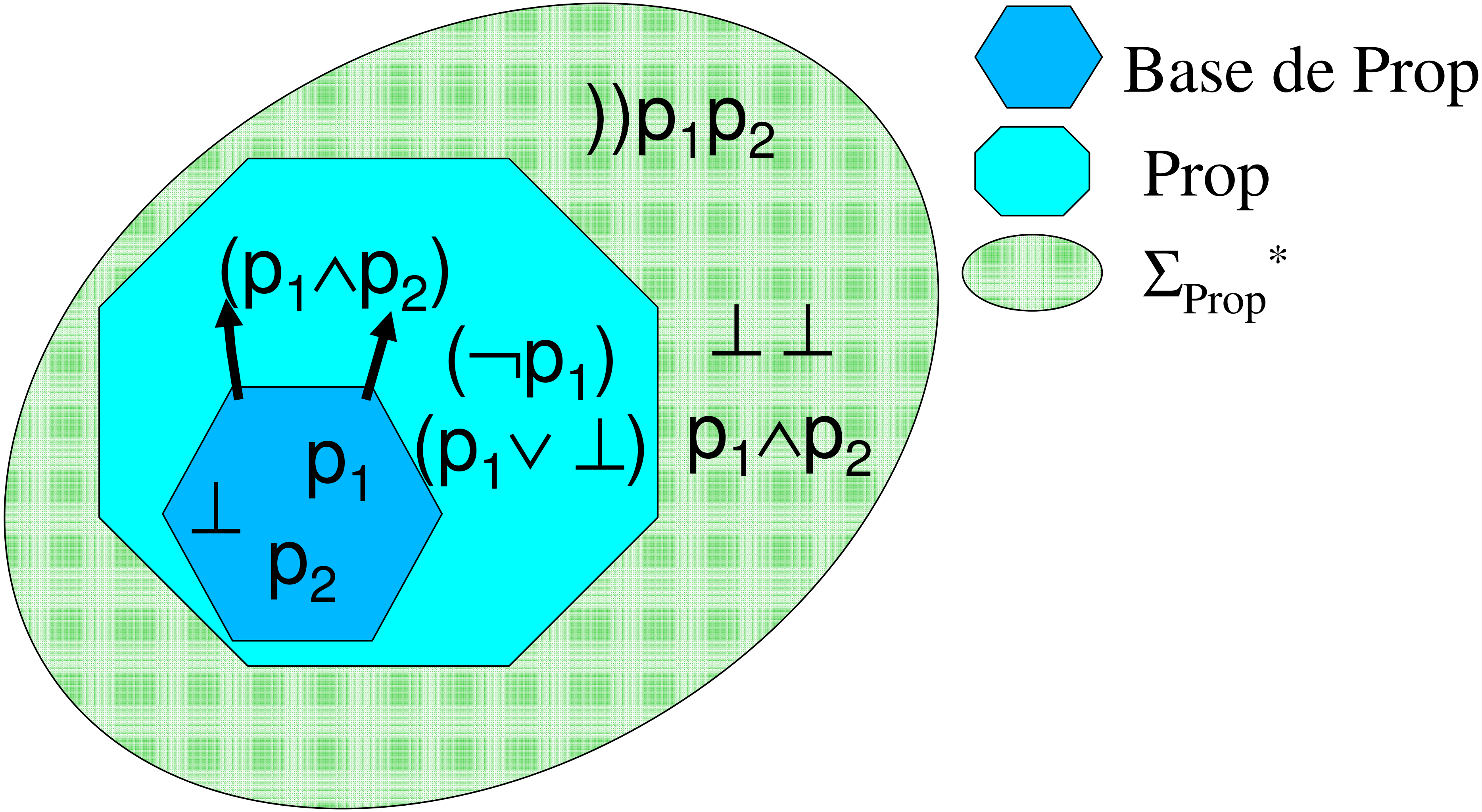
Convención:

- 0 = Falso   1 = Verdadero

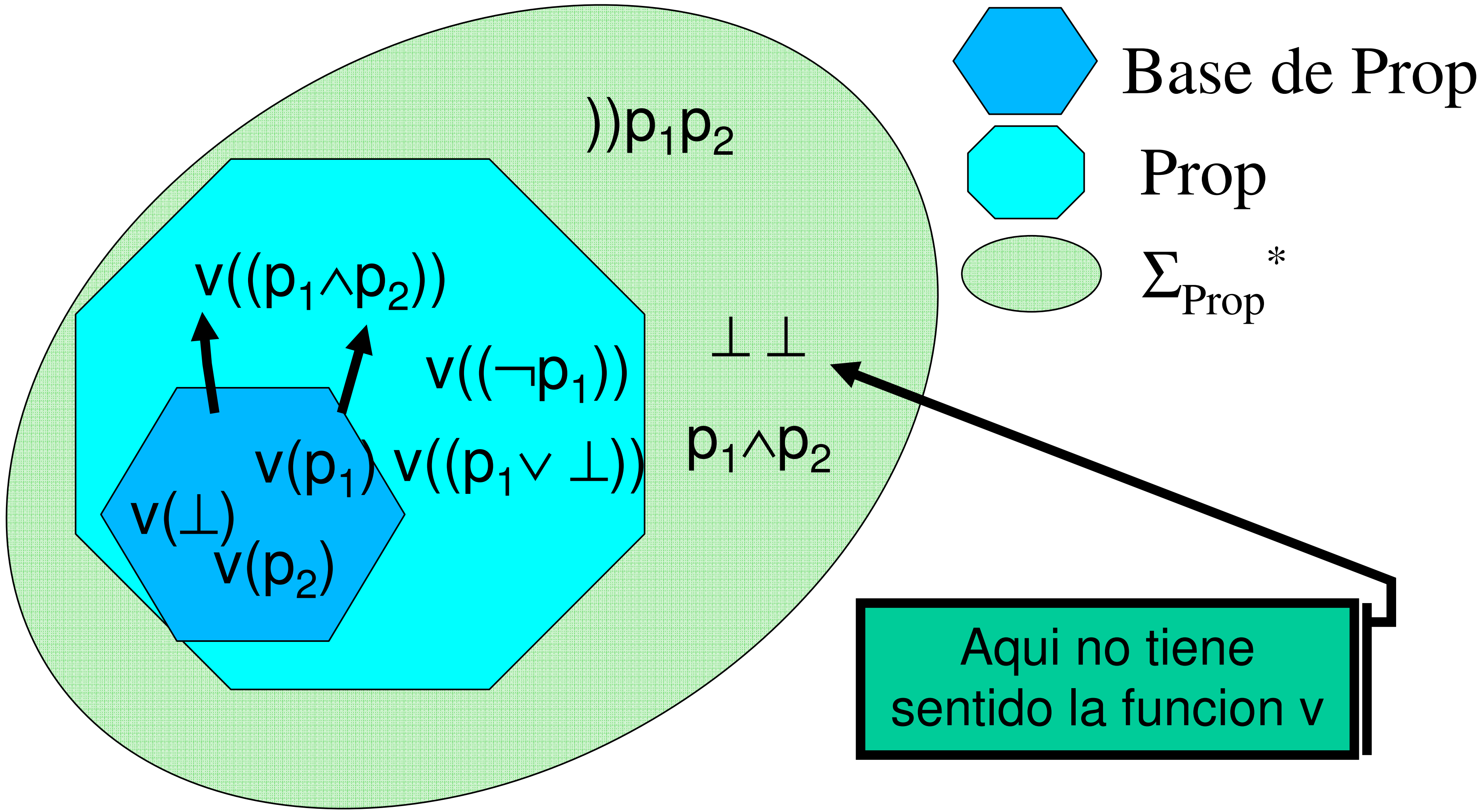
Las palabras de PROP

- Las proposiciones atomicas tienen un valor de verdad conocido.
- Se abstraen las proposiciones simples a letras.
- La frase “Los perros comen salchichas con tuco” colapsa a, por ejemplo, p_0.
- Y si esa frase es verdad en un mundo v, diremos que $v(p_0) = 1$. Y si es falsa, diremos que $v(p_0) = 0$.

Construyendo PROP



Calculando Valores de Verdad



Semántica de Prop: Valuaciones

- Resumiendo:
  - Prop está definido inductivamente.
  - La semántica está dada por los valores de verdad de la proposiciones ya sean simples o complejas.
  - Se buscará la forma de construir esa semántica teniendo en cuenta que:
    - Las letras proposicionales pueden tomar cualquier valor.
    - El valor de las letras proposicionales se "transmite", lo que permite calcular el valor de las proposiciones complejas en función del valor de las proposiciones más simples.

Significado de algunos conectivos

- El dos es par **o** impar
- El dos es par **o** natural
  - Ambas frases son verdaderas
- **Si** n es multiplo de 6, **entonces** 4 es par
- **Si** 4 es impar, **entonces** 3 es par
  - Son frases verdaderas
- **Si** ustedes estudian, **entonces** aprobaran la asignatura
  - Cuando es falsa esta frase?

Significado de los conectivos

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

$\neg$	
0	1
1	0

$\bot$
0

Valuaciones - Ejemplos

- Una valuacion es una función de PROP $\rightarrow$ {0,1} transmite valores de verdad a partir de las letras proposicionales.
- No cualquier función de PROP $\rightarrow$ {0,1} es una valuación.
- Ejemplos de funciones no son valuaciones:
  - $f(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in$ PROP
  - $g(\alpha) = (\mathrm{Long}(\alpha)+1) \bmod 2$
- ¿Cómo se construyen funciones que sean valuaciones?
  - Asegurando que el valor de las fórmulas compuestas queda determinado unívocamente por los valores de las variables.

Valuaciones

Def 1.2.1 [valuación]

- Una función v: PROP $\to$ {0,1} es una valuación sii satisface:
  - $v(\bot) = 0$
  - $v((\alpha \land \beta)) = \text{mín}\{v(\alpha), v(\beta)\}$
  - $v((\alpha \lor \beta)) = \text{máx}\{v(\alpha), v(\beta)\}$
  - $v((\alpha \to \beta)) = \text{máx}\{1\text{-}v(\alpha), v(\beta)\}$
  - $v((\alpha \leftrightarrow \beta)) = 1$ ssi $v(\alpha) = v(\beta)$
  - $v((\neg\alpha)) = 1 - v(\alpha)$

Observar que esta NO ES la definición de UNA valuación, sino que es una serie de ecuaciones que garantizan la transmisión de la verdad.

Valuaciones - Propiedades

- El valor de verdad de los átomos determina una única valuación (el valor para cualquier fórmula).

  Teorema 1.2.2

  Sea $w: P \rightarrow \{0,1\}$

  Entonces existe una única valuación $v: PROP \rightarrow \{0,1\}$ tal que $v(p_i) = w(p_i)$ para todo $p_i \in P$

- El valor de verdad de una fórmula depende únicamente del valor de sus letras de proposición

  Lema 1.2.3

  Sea $\alpha \in PROP$, y sean v y v' dos valuaciones tales que $v(p_i) = v'(p_i)$ para toda letra pi que ocurre en α

  Entonces $v(\alpha) = v'(\alpha)$

Teo 1.2.2

- H) $w: P \to \{0,1\}$
- T) Existe una única valuación $v: PROP \to \{0,1\}$ tal que $v(p_i) = w(p_i)$ para todo $p_i \in P$

Dem:

- Considere una función v sobre Prop definida por recursión primitiva tal que:
  - $v(p_i) = w(p_i)$ para todo $p_i \in P$
  - v es una valuación (cumple con Def. 1.2.1).
- Esta función existe y es única dado que fue definida por recursión primitiva. Además es valuación (por su propia definición).

Tautología – Consecuencia lógica

<u>Def 1.2.4</u> [tautología, consecuencia lógica]

a. $\alpha \in$ PROP es una tautología ssi para cualquier valuación v se cumple que $v(\alpha) = 1$.

b. Dadas $\Gamma \subseteq$ PROP y $\alpha \in$ PROP, α es consecuencia lógica de Γ ssi para cualquier valuación v:

Si (para todo $\gamma \in \Gamma$ :: $v(\gamma) = 1$), entonces $v(\alpha) = 1$

<u>Notación</u>:

- $\Gamma \models \alpha$ se lee "α es consecuencia lógica de Γ"
- $\boldsymbol{\gamma_1 \ldots \gamma_n} \models \alpha$ se lee como $\{\gamma_1 \ldots \gamma_n\} \models \alpha$
- $\models \alpha$ se lee como $\varnothing \models \alpha$
- $\models \alpha$ se lee como α es tautología.

Ejemplos

- T) $\models \varphi \rightarrow \varphi$

  Dem.

  – Sea v valuacion arbitraria

  – $v(\varphi \rightarrow \varphi) = \text{máx}\{1 - v(\varphi), v(\varphi)\}$ (Def. valuacion)

  $= 1$ (El recorrido de la valuacion es $\{0,1\}$)

  LQQD

- T) $\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$

  Dem.

  – Sea v una valuacion tal que $v(\varphi) = 1$ y $v(\psi) = 1$.

  – $v(\varphi \wedge \psi) = \min\{v(\varphi), v(\psi)\}$ (Def. valuacion)

  $= 1$ (Hipotesis)

  LQQD

Ejemplos

- Demuestre o de un contraejemplo de $\models p_0 \rightarrow p_1$

Dem. (contraejemplo)

– Sea v valuacion tal que $v(p_0)=1$ y $v(p_1)=0$

– $v(p_0 \rightarrow p_1) = \text{máx}\{1-v(p_0), v(p_1)\}$ (Def. valuacion)

$= 0$

– Por lo que **no** es cierto que $p_0 \rightarrow p_1$ sea tautología.

LQQD

- *Cuando se trabaja con implicaciones, puede ser más simple verificar cuando **no** es tautología.*

Ejemplos

- Demostrar o dar un contraejemplo para $p_1 \models p_2 \wedge p_3$

Dem. (contraejemplo)

- Sea v valuacion tal que $v(p_1)=1$, $v(p_2)=0$ y $v(p_3)=0$
- $v(p_2 \wedge p_3) = \min\{v(p_2), v(p_3)\}$ (Def. valuacion)

  $= 0$
- Por lo que **no** es cierto que $p_1 \models p_2 \wedge p_3$.

LQQD

- *Cuando se trabaja con consecuencias lógicas, puede ser más simple analizar cuando* ***no*** *se cumple.*

Consecuencia lógica – Más Ejemplos

Para todas α , $\beta \in$ PROP:

$\alpha , \beta \models \alpha \wedge \beta$

$\alpha \models \alpha \vee \beta$

$\beta \models \alpha \vee \beta$

$\alpha \vee \beta , \neg \alpha \models \beta$

$\alpha \vee \beta , \neg \beta \models \alpha$

$\alpha , \neg \alpha \models \bot$

$\alpha \to \beta , \neg \beta \models \neg \alpha$

$\alpha \leftrightarrow \beta , \alpha \models \beta$

$\alpha \leftrightarrow \beta , \neg \alpha \models \neg \beta$

Tablas de Verdad

- Las Tablas de verdad muestran todos los posibles valores de verdad que una fórmula proposicional puede tomar.
- Describen explicitamente todas las posibles valuaciones *interesantes (recordar 1.2.3)* de una formula proposicional.

Ejemplo

Tabla de verdad de $(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))$:

1	2	3	4	5	6
p_1	p_2	$(p_1 \rightarrow p_2)$	$(p_1 \vee p_2)$	$\neg(p_1 \vee p_2)$	$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg(p_1 \vee p_2))$
0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0

A las fórmulas como esta que son verdaderas en algunas valuaciones y falsa en otras se les llama ***CONTINGENCIAS***

Tautologias

Tabla de verdad de $(p_1 \lor p_2) \leftrightarrow ((\neg p_1) \rightarrow p_2)$:

1	2	3	4	5	6
p_1	p_2	$(p_1 \lor p_2)$	$\neg p_1$	$(\neg p_1) \rightarrow p_2$	$(p_1 \lor p_2) \leftrightarrow ((\neg p_1) \rightarrow p_2)$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	1

Esta proposición es siempre verdadera sin importar el valor de verdad de p_1 y p_2

tautología

Tautologías

Observar: $\varphi \in$ PROP es tautología sii $\models \varphi$

Ejemplos: Para todas $\alpha, \beta, \gamma \in$ PROP:

$\models (\alpha \leftrightarrow \alpha)$	$\models (\alpha \leftrightarrow (\neg(\neg \alpha)))$
$\models (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$	$\models (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\beta \wedge \alpha)$
$\models (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$	$\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\neg\beta) \rightarrow (\neg\alpha))$
$\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\neg \alpha) \vee \beta)$	$\models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg (\alpha \wedge (\neg \beta)))$
$\models (\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$	$\models (\alpha \wedge \alpha) \leftrightarrow \alpha$
$\models (\alpha \wedge (\neg \alpha)) \leftrightarrow \perp$	$\models \perp \rightarrow \alpha$

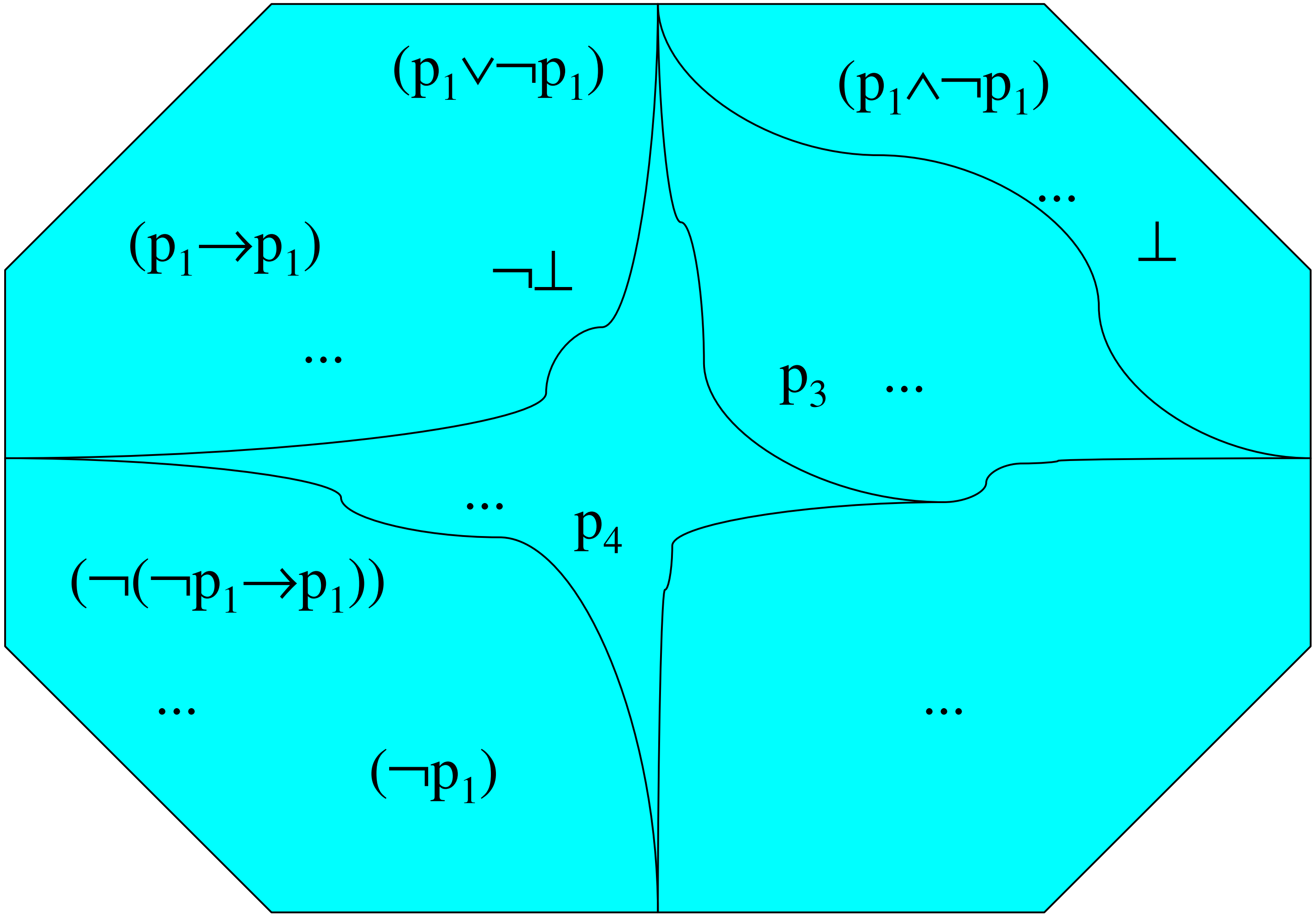
$\models (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$

$\models (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$

Equivalencia de Proposiciones

- Def [equivalencia de proposiciones]
  - Dos fórmulas proposicionales α y β son equivalentes sii $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una tautología
- Notación: α eq β abrevia $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$
- Observar: α eq β si y sólo si,
  - para cualquier valuación v: PROP $\rightarrow \{0,1\}$ se cumple que $v(\alpha) = v(\beta)$
- Lema 1.3.5
  - La relación eq es de equivalencia en PROPxPROP

Equivalencia de Proposiciones: Clases de Equivalencia



Sustitución por fórmulas equivalentes

- Si α_1 y α_2 son equivalentes, entonces puedo sustituir una letra proposicional de una fórmula β cualquiera por α_1 y por α_2, y obtener fórmulas equivalentes
- Esto se utiliza mucho en matemática: no dudamos cuando vemos el siguiente razonamiento:

  $3 + (2 \times 5) = 3 + 10$

- Por qué es válido eso?
  - Porque sabemos que $2 \times 5 = 10$
  - y reemplazamos iguales por iguales

  esto es, en la expresión $(3 + \xi)$ sustituimos a ξ por 2×5 y por 10 y obtenemos dos números iguales.

Funciones recursivas: sustitución

- $\alpha[\varphi / p_i]$ denota la fórmula obtenida de sustituir todas las ocurrencias de p_i en la fórmula α por la fórmula φ
- Se define por recursión primitiva en α

<u>Def</u> [sustitución de una fórmula por una variable]

$\_\ [\_/\_] : PROP \times PROP \times P \rightarrow PROP$

$$\perp [\varphi / p_i] = \perp$$

$$pj\ [\varphi / p_i] = \begin{cases} \varphi & \text{si } i = j \\ p_j & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$(\alpha \quad \beta)\ [\varphi / p_i] = (\alpha\ [\varphi \ / p_i] \quad \beta\ [\varphi \ / p_i]) \quad , \in C$$

$$(\neg\alpha)\ [\varphi / p_i] = (\neg\ \alpha[\varphi / p_i])$$

Sustitución por fórmulas equivalentes: Teorema de Sustitución

- Teorema 1.2.5 [sustitución]
  - H) α_1 eq α_2
  - T) para toda $\beta \in$ PROP y para cualquier $p \in P$ se cumple que:
    - $\beta[\alpha_1/p]$ eq $\beta[\alpha_2/p]$
- Ejemplo:
  - Como $(p_1 \vee p_2)$ eq $(p_2 \vee p_1)$, entonces $((p_4 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$ eq $(p_4 \rightarrow (p_2 \vee p_1))$ porque $(p_4 \rightarrow q) [p_1 \vee p_2/q]$ eq $(p_4 \rightarrow q) [p_2 \vee p_1/q]$

Leyes algebraicas (tautologías)

Para todas φ , ψ, $\sigma \in$ PROP:

$\models (\varphi \vee \psi) \vee \sigma \leftrightarrow \varphi \vee (\psi \vee \sigma)$

$\models (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

} asociatividad de $\wedge$ y $\vee$

$\models (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

$\models (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

} conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$

$\models \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$

$\models \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma)$

} distributividad de $\wedge$ y $\vee$

$\models \neg (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$

$\models \neg (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \vee \neg\varphi)$

} Leyes de De Morgan

$\models (\varphi \vee \varphi) \leftrightarrow \varphi$

$\models (\varphi \wedge \varphi) \leftrightarrow \varphi$

} idempotencia de $\wedge$ y $\vee$

$\models \neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$ } doble negación

Más propiedades...

- <u>Lema 1.3.2</u>
  - Si $\models \alpha \rightarrow \beta$
  - entonces $(\alpha \wedge \beta)$ eq α y $(\alpha \vee \beta)$ eq β
- <u>Lema 1.3.3</u>
  a. Si $\models \alpha$ entonces $(\alpha \wedge \beta)$ eq β
  b. Si $\models \alpha$ entonces $(\neg\alpha \vee \beta)$ eq β
  c. $(\perp \vee \beta)$ eq β
  d. $(\neg\perp \wedge \beta)$ eq β

Equivalencias entre conectivos

Teorema 1.3.4

Para todas $\alpha, \beta \in PROP$:

a. $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ eq $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

b. $(\alpha \to \beta)$ eq $(\neg\alpha \vee \beta)$

c. $(\alpha \vee \beta)$ eq $(\neg\alpha \to \beta)$

d. $(\alpha \vee \beta)$ eq $\neg(\neg\beta \wedge \neg\alpha)$

e. $(\alpha \wedge \beta)$ eq $\neg(\neg\beta \vee \neg\alpha)$

f. $\neg\alpha$ eq $(\alpha \to \bot)$

g. $\bot$ eq $(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Conjuntos completos de conectivos

- Un conjunto de conectivos C es completo si cualquier función de verdad es definible en términos de los conectivos de C
- Def [conjunto completo de conectivos]
  - C es un conjunto completo de conectivos si para conectivo n-ario \$ (n>0) y letras proposicionales $p_{i1},p_{i2},\ldots p_{in}$ existe una fórmula $\sigma\in$ PROP que contiene sólo a $p_{i1},p_{i2},\ldots p_{in}$ y a los conectivos de C tal que σ eq $\$(p_{i1},p_{i2},\ldots p_{in})$

Conjuntos completos de conectivos

- <u>Teorema 1.3.6</u>
  - $\{\neg , \vee\}$ es un conjunto completo de conectivos
- También $\{\neg , \vee\}$, $\{\neg , \wedge\}$, $\{\perp , \rightarrow\}$ y $\{\neg , \rightarrow\}$ son completos

Conjunciones y disyunciones finitas

Definición 1.3.7

$$\bigwedge_{i\leq 0} \varphi_i = \varphi_0 \qquad \bigvee_{i\leq 0} \varphi_i = \varphi_0$$

$$\bigwedge_{i\leq n+1} \varphi_i = \varphi_{n+1} \wedge \Big(\bigwedge_{i\leq n} \varphi_i\Big) \qquad \bigvee_{i\leq n+1} \varphi_i = \varphi_{n+1} \vee \Big(\bigvee_{i\leq n} \varphi_i\Big)$$

Formas Normales

Definición 1.3.8 [formas normales]

- Una fórmula está en ***forma normal conjuntiva*** sii es de la forma: $\bigwedge_{i\leq n}(\bigvee_{j \leq m_i} \varphi_{ij})$

  donde cada φ_{ij} es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.
- Una fórmula está en ***forma normal disyuntiva*** sii es de la forma: $\bigvee_{i\leq n}(\bigwedge_{j \leq m_i} \varphi_{ij})$

  donde cada φ_{ij} es una fórmula atómica o la negación de una fórmula atómica.

Formas Normales (cont.)

Teorema 1.3.9

Para toda $\alpha \in$ PROP existen fórmulas α^c y α^d en forma normal conjuntiva y forma normal disjuntiva respectivamente tales que:

$$\alpha \ eq \ \alpha^c \quad \text{y} \quad \alpha \ eq \ \alpha^d$$

Semántica: Conclusión

- Para responder / verificar las nociones de consecuencia lógica y tautología:
  - Usamos un *método de cálculo* (tablas de verdad)
- Para simplificar un problema inicial y llevarlo a una tautología conocida, usamos nociones de:
  - *equivalencia lógica*
  - *sustitución*