

Problema 3

a. Empecemos por i : Por ecuación dinámica de la bobina:

$$\dot{i} = \frac{(v_2 - v_1)}{L} = \frac{8\omega_0}{9R} (v_2 - v_1) \quad (1)$$

Seguimos con v_1 . Por ecuación dinámica del condensador:

$$\dot{v}_1 = \frac{1}{C_1} i = \frac{3\omega_0 R}{8} i \quad (2)$$

Finalizamos con v_2

$$\dot{v}_2 = \frac{1}{C_2} \left(\frac{v_1 - v_2}{R} - i \right) = -3\omega_0 R i - 3\omega_0 v_2 + 3\omega_0 v_1 \quad (3)$$

De las ecuaciones 1, 2 y 3 ya tenemos la información para escribir las matrices A y B .

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{v}_1(t) \\ \dot{v}_2(t) \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{8\omega_0}{9R} & \frac{8\omega_0}{9R} \\ \frac{3\omega_0 R}{8} & 0 & 0 \\ -3\omega_0 R & 0 & -3\omega_0 \end{pmatrix}}^A \begin{pmatrix} i(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\omega_0 R \end{pmatrix}}^B v_i(t) \quad (4)$$

Además sale directamente por definición en el circuito que:

$$v_o(t) = v_1(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}^C \begin{pmatrix} i(t) \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}}^D v_i(t) \quad (5)$$

b.

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & \frac{8\omega_0}{9R} & -\frac{8\omega_0}{9R} \\ -\frac{3\omega_0 R}{8} & s & 0 \\ 3\omega_0 R & 0 & s + 3\omega_0 \end{pmatrix} \implies |sI - A| = s^3 + 3\omega_0 s^2 + 3\omega_0^2 s + \omega_0^3 \quad (6)$$

Desarrollando la forma genérica de un binomio al cubo:

$$(s - a)^3 = s^3 - 3a s^2 + 3a^2 s - a^3 \quad (7)$$

De las ecuaciones 6 y 7 vemos que son iguales con $a = -\omega_0$ por lo tanto $-\omega_0$ es la raíz triple del polinomio característico de A

c. Tenemos dos métodos para calcular la transferencia, uno es usando las matrices que hallamos:

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{(s + \omega_0)^3} \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & \frac{\omega_0^2}{3} \\ X & X & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\omega_0 R \end{pmatrix} = \frac{\omega_0^3}{(s + \omega_0)^3} \quad (8)$$

El otro método es usar división de tensión en el circuito en Laplace:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\overbrace{1}^{\text{Divisor entre } V_o \text{ y } V_2}}{LC_1 s^2 + 1} \frac{\overbrace{1}^{\text{Divisor entre } V_2 \text{ y } V_1}}{R \left(C_2 s + \frac{C_1 s}{LC_1 s^2 + 1} \right) + 1} \quad (9)$$

$$= \frac{1}{Rs \left(C_2 (LC_1 s^2 + 1) + C_1 \right) + LC_1 s^2 + 1} = \frac{1}{LC_1 C_2 R s^3 + LC_1 s^2 + R(C_1 + C_2) s + 1} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{\frac{s^3}{\omega_0^3} + 3\frac{s^2}{\omega_0^2} + 3\frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{\omega_0^3}{(s + \omega_0)^3} \quad (11)$$

- d. El sistema es internamente estable ya que A tienen un único valor propio que es real negativo.
- e. El sistema es BIBO estable y se puede justificar sencillamente de dos maneras con lo que tenemos hasta el momento:
- Usando que la estabilidad BIBO es condición necesaria para la estabilidad interna y por la parte d. por ser el sistema internamente estable, esto implica su estabilidad BIBO.
 - Usando el teorema de estabilidad en Laplace para funciones reales racionales y propias y viendo que la transferencia $H(s)$ tiene un único polo real negativo.
- f. Podemos abrir el lazo a la entrada del seguidor conformado por el operacional de más a la derecha ya que su impedancia de entrada es infinita.

Lo primero que vemos es un divisor de tensión formado por dos resistencias iguales, el mismo tiene ganancia $\frac{1}{2}$.

Luego como la entrada es nula vemos un no inversor de ganancia 2.

A la salida del no inversor tenemos un integrador de ganancia $\frac{-1}{kRCs} = \frac{-\omega_0}{9ks}$.

Finalmente tenemos el circuito de la parte a con ganancia $H(s)$. Juntando lo anterior tenemos

$$G_{OL}(s) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{-\omega_0}{9ks} \times H(s) = \frac{-\omega_0^4}{ks(s + \omega_0)^3} \implies L(s) = A\beta(s) = \frac{\omega_0^4}{9ks(s + \omega_0)^3} \quad (12)$$

- g. El diagrama de Bode comienza decreciendo a 20 db/dec por el polo en 0, a su vez comienza con fase $-\frac{\pi}{2}$.

Luego por el polo triple negativo en ω_0 pasa a decrecer a 80 db/dec y la fase disminuye en $3\frac{\pi}{2}$ llegando a -2π .

El resultado se muestra en la figura 1

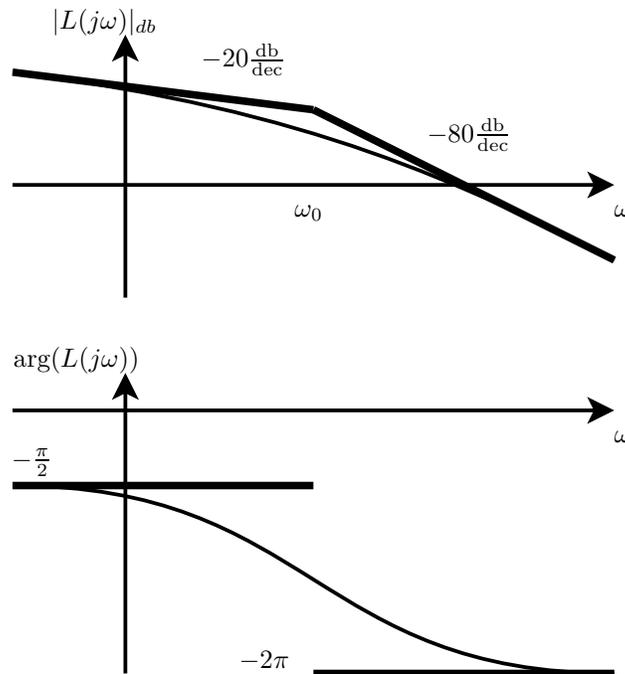


Figura 1: Diagrama de Bode

Para hacer el diagrama de Nyquist tenemos que usar la curva \mathcal{C} de la figura 2, con $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ ya que debemos esquivar el polo en el origen.

El segmento 1 lo mapeamos evaluando L en la curva $re^{j\vartheta}$, con $\vartheta : 0 \nearrow \frac{\pi}{2}$.

$$L(e^{j\vartheta}) \stackrel{r \rightarrow 0}{\simeq} \frac{\omega_0^4}{9kr e^{j\vartheta} \omega_0^3} = \frac{\omega_0}{9kr} e^{-j\vartheta} \quad (13)$$

La curva de la ecuación 13 es un cuarto de circunferencia de radio infinito y argumento que va de 0 a $-\frac{\pi}{2}$

El segmento 2 se mapea usando la información del diagrama de Bode y el 3 se mapea al origen por ser L estrictamente propia.

El diagrama de Nyquist queda como en la figura 2

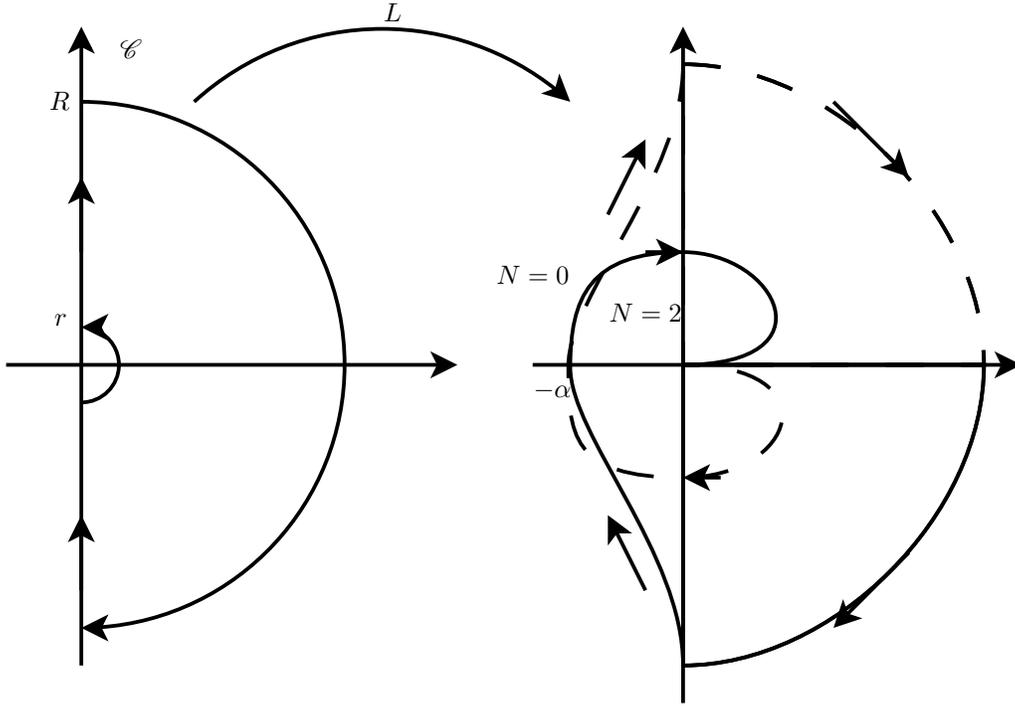


Figura 2: Diagrama de Nyquist

- h. Para estudiar la estabilidad del sistema realimentado usamos el criterio de Nyquist, cómo la curva \mathcal{C} no encierra ningún polo de L para que el sistema sea estable necesitamos que la curva $L(\mathcal{C})$ no encierre al -1 . Por lo tanto el sistema será estable si $\alpha < 1$.

Buscamos α :

$$\frac{\omega_0^4}{kj\omega(j\omega + \omega_0)^3} = -\alpha \implies \omega_0^4 = -9k\alpha j\omega(-j\omega^3 - 3\omega^2\omega_0 + 3j\omega\omega_0^2 + \omega_0^3) \quad (14)$$

Igualando partes real e imaginaria tenemos:

$$\text{parte real)} \quad \omega_0^4 = -9k\alpha(\omega^4 - 3\omega^2\omega_0^2) \quad (15)$$

$$\text{parte imaginaria)} \quad 3\omega^2 = \omega_0^2 \implies \omega^2 = \frac{\omega_0^2}{3} \quad (16)$$

Sustituyendo 16 en 15:

$$\omega_0^4 = -9k\alpha \left(\frac{\omega_0^4}{9} - \omega_0^4 \right) \implies k = \frac{1}{8\alpha} \begin{matrix} \alpha < 1 \\ > \frac{1}{8} \end{matrix} \quad (17)$$

O sea que para que el sistema sea BIBO estable debe cumplirse $k > \frac{1}{8}$.